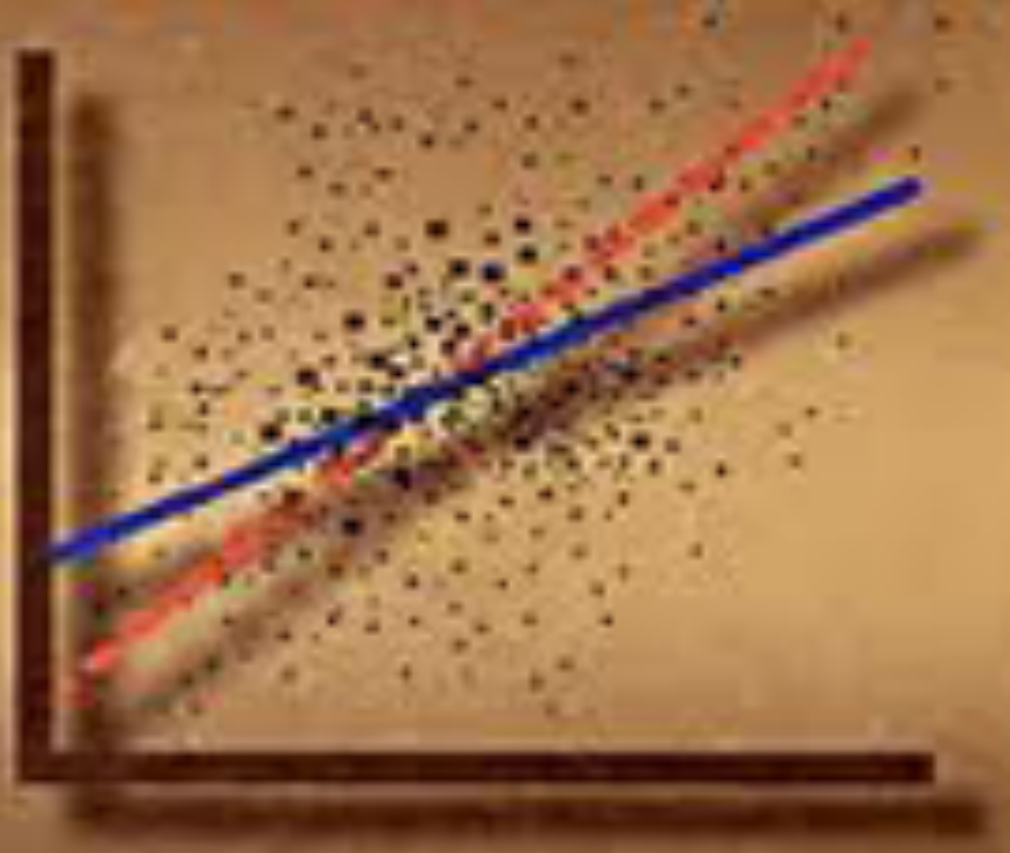
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γ' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

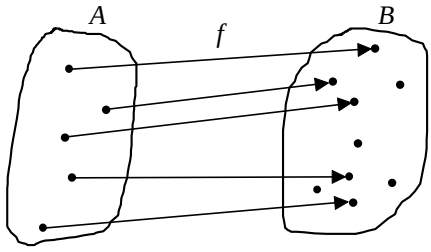
Εισαγωγή

Στο χώρο της επιστήμης το 17ο αιώνα κυριαρχούσε η μελέτη της κίνησης των ουράνιων σωμάτων, καθώς και η μελέτη της κίνησης ενός σώματος πάνω ή κοντά στη Γη. Στη μελέτη αυτή προφανώς σημαντικό ρόλο έπαιζε ο προσδιορισμός του μέτρου της ταχύτητας και της διεύθυνσης της κίνησης του σώματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν η θέση του σώματος μια χρονική στιγμή t εκφράζεται με τη συνάρτηση $x = f(t)$, τότε ο προσδιορισμός του μέτρου και της διεύθυνσης της ταχύτητάς του τη χρονική στιγμή t ανάγεται στον προσδιορισμό *του ρυθμού μεταβολής* της $x = f(t)$ ως προς t ή, όπως ονομάστηκε αργότερα, *της παραγώγου της* $x = f(t)$. Έτσι, προβλήματα σχετικά με την κίνηση ενός σώματος, καθώς και άλλα που θα συναντήσουμε αργότερα, οδήγησαν στη γένεση του Διαφορικού Λογισμού. Θεμελιωτές του είναι οι Newton (1642-1727) και Leibniz (1646-1716), οι οποίοι εισήγαγαν τη γενική έννοια της "παραγώγου" και του "διαφορικού", βελτίωσαν τις μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού και τις χρησιμοποίησαν στην επίλυση προβλημάτων της Γεωμετρίας και της Μηχανικής. Η ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού δε σταμάτησε το 17ο αιώνα, αλλά συνεχίστηκε το 18ο αιώνα με τη σημαντική συμβολή των αδελφών Jacob Bernoulli (1654-1705) και Johann Bernoulli (1667-1748), του Euler (1707-1783), κορυφαίου μαθηματικού της εποχής, του Lagrange (1736-1813) και πολλών άλλων. Τέλος, η αυστηρή θεμελίωση του Διαφορικού Λογισμού έγινε από τους μαθηματικούς του 19ου αιώνα όπως του Bolzano (1781-1848), του Cauchy (1789-1857) και του Weierstrass (1815-1897).

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός Συνάρτησης

Είδαμε σε προηγούμενες τάξεις ότι συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B.



1

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο *A*, που λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου *R* των πραγματικών αριθμών, ενώ το *B* συμπίπτει με το *R*. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς **συναρτήσεις**. Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα *f, g, h, φ, σ* κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A*. Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε "*y* ίσον *f* του *x*". Το $f(x)$ λέγεται **τιμή της *f* στο *x***. Το γράμμα *x*, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του *A*, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το *y*, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο *x* και εξαρτάται από την τιμή του *x*, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Σε μια συνάρτηση συνήθως η τιμή της εκφράζεται με έναν αλγεβρικό τύπο, για παράδειγμα $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Σ'αυτή την περίπτωση λέμε: "η συνάρτηση *f* με $f(x) = \sqrt{1-x^2}$" ή "η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$" ή "η συνάρτηση $y = \sqrt{1-x^2}$" ή, απλούστερα, " η συνάρτηση $\sqrt{1-x^2}$".

Όταν το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το "ευρύτερο" υποσύνολο του *R* στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Έτσι, η παραπάνω συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $1 - x^2 \geq 0$, δηλαδή το διάστημα $\Delta = [-1, 1]$, η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{3}{x-2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbf{R} - \{2\}$, δηλαδή το **R** χωρίς το 2, ενώ η συνάρτηση $h(x) = 3x - 1$ έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών.

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα *f* για το συμβολισμό μιας συνάρτησης και τα γράμματα *x* και *y* για το συμβολισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής αντιστοίχως, ωστόσο μπορούμε να

χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα. Έτσι, για παράδειγμα, οι τύποι $f(x)=\frac{1}{2}gx^2$ και $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα $S=f+g$, με $S(x)=f(x)+g(x)$, $x\in A$
- Η διαφορά $D=f-g$, με $D(x)=f(x)-g(x)$, $x\in A$
- Το γινόμενο $P=f\cdot g$, με $P(x)=f(x)\cdot g(x)$, $x\in A$ και
- Το πηλίκο $R=\frac{f}{g}$, με $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x\in A$ και $g(x)\neq 0$.

Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=x+1$, τότε

$$S(x)=x^2-1+x+1=x(x+1)$$

$$D(x)=x^2-1-x-1=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

$$P(x)=(x^2-1)(x+1)=(x+1)^2(x-1)$$

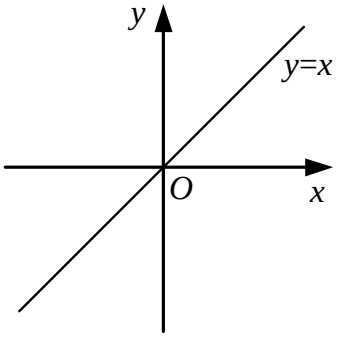
$$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1,\quad \text{όπου}\quad x\neq -1.$$

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

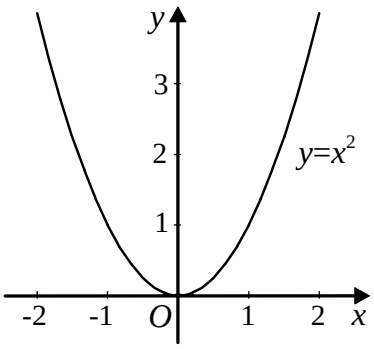
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Όπως είδαμε σε προηγούμενες τάξεις **γραφική παράσταση** ή **καμπύλη της** f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x\in A$. Επομένως, ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f, μόνο όταν $y=f(x)$. Η εξίσωση λοιπόν $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x,y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της f**.

Είναι πολύ χρήσιμο να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων που γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.

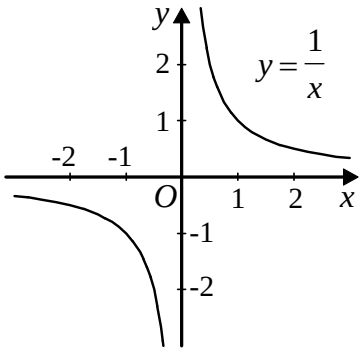
2



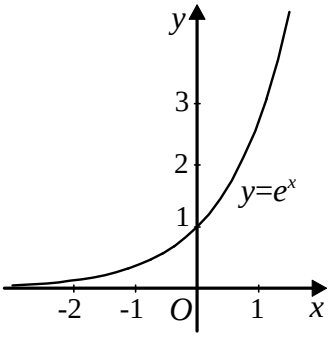
(α) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



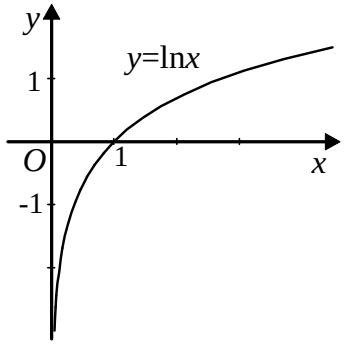
(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια *παραβολή*.



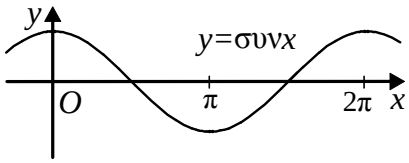
(γ) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια *υπερβολή*.

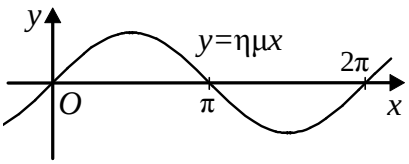


(δ) Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι "πάνω" από τον άξονα $x'x$, αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.



(ε) Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ είναι "δεξιά" του άξονα yy', αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x > 0$.



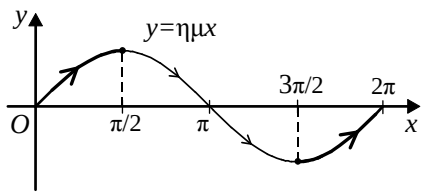


(στ) Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

Παρατηρούμε ότι στη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ υπάρχει μια διακοπή στο σημείο $x=0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πεδίο ορισμού της f δεν περιέχει το μηδέν.

Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης

3



- Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$, $x\in[0,\,2\pi]$ προκύπτει αμέσως ότι για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος $\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$ είναι $\eta\mu x_1<\eta\mu x_2$. Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]$. Το ίδιο συμβαίνει και στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2},\,2\pi\right]$. Όμως για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος $\left[\frac{\pi}{2},\,\frac{3\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$, παρατηρούμε ότι $\eta\mu x_1>\eta\mu x_2$. Λέμε σ'αυτή την περίπτωση ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\,\frac{3\pi}{2}\right]$. Γενικά:

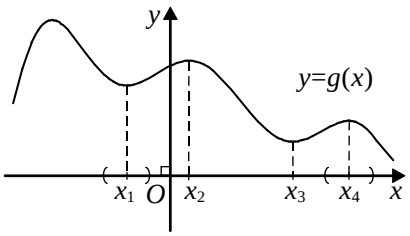
> Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο Δ, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

- Ακόμη, για την παραπάνω συνάρτηση παρατηρούμε ότι για κάθε

$x \in [0,\ 2\pi]$ είναι $\eta\mu x \le 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu x \ge -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2}$. Δηλαδή, όπως λέμε, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει *ολικό μέγιστο* (maximum) για $x = \frac{\pi}{2}$ και *ολικό ελάχιστο* (minimum) για $x = \frac{3\pi}{2}$.

4



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g του σχήματος 4 προκύπτει ότι για $x = x_1$ η τιμή της g είναι μικρότερη από τις τιμές της g σε όλα τα x που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1, ή, όπως λέμε σε μια **περιοχή** του x_1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση g έχει στο σημείο x_1 *τοπικό ελάχιστο*. Το ίδιο συμβαίνει και για $x = x_3$. Οι τιμές $g(x_1)$ και $g(x_3)$ λέγονται *τοπικά ελάχιστα* της συνάρτησης. Επίσης, για $x = x_4$ η τιμή $g(x_4)$ είναι μεγαλύτερη από τις τιμές της g σε όλα τα x που ανήκουν σε μια περιοχή του x_4. Λέμε ότι η συνάρτηση g έχει στο σημείο x_4 *τοπικό μέγιστο*. Το ίδιο συμβαίνει και για $x = x_2$. Οι τιμές $g(x_2)$ και $g(x_4)$ λέγονται *τοπικά μέγιστα* της συνάρτησης. Παρατηρούμε ότι ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο. Για παράδειγμα, το τοπικό ελάχιστο $g(x_1)$ είναι μεγαλύτερο από το τοπικό μέγιστο $g(x_4)$.

Γενικά:

> Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:
> **Τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, και **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

Όριο Συνάρτησης

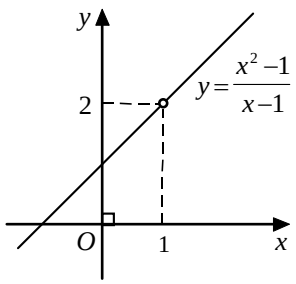
Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, η οποία δεν ορίζεται για $x = 1$. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της f για τιμές του x κοντά στο 1.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του $f(x)$ για τιμές του x κοντά στο 1.

$x<1$	$f(x)$	$x>1$	$f(x)$
0,5	1,500000	1,5	2,500000
0,9	1,900000	1,1	2,100000
0,99	1,990000	1,01	2,010000
0,999	1,999000	1,001	2,001000
0,9999	1,999900	1,0001	2,000100

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 (και από τις δύο πλευρές του 1), το $f(x)$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2. Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε, αν παρατηρήσουμε ότι για $x \neq 1$ είναι

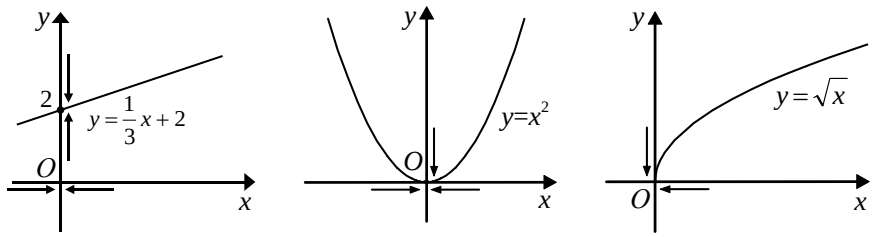
$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1, \qquad (5)$$



οπότε όταν το x παίρνει τιμές που τείνουν στο 1 $(x \to 1)$, τότε το $f(x)=x+1$ παίρνει τιμές που τείνουν στο 2 $(x+1 \to 2)$. Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο 1 όριο (limit) 2 και γράφουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Με το προηγούμενο παράδειγμα παρουσιάσαμε με απλό τρόπο και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0, που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, υπάρχουν όμως σημεία του πεδίου ορισμού της πολύ κοντά στο x_0. Τίποτα βέβαια δεν αποκλείει την αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης και σε ένα σημείο x_0 που να ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x+2$, που είναι ορισμένη στο *R*. Παρατηρούμε ότι όταν $x \to 0$, το $f(x) \to 2$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$. Ομοίως, $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$.

(6)



(α) (β) (γ)

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\ell_1+\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x))=k\ell_1$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\ell_1\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{\nu}=\ell_1^{\nu}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\ell_1}$.

Έτσι, για παράδειγμα, για την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=x^2+3x-9$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-9)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+3\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}9=4+6-9=1$.

Παρατηρούμε ότι για τη συνάρτηση $f(x)=x^2+3x-9$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=2$.

Γενικά **μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0\in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$**.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι ισχύει για παράδειγμα $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi x_0$ (όταν $\sigma\upsilon\nu x_0\neq 0$).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{4x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)$ **iii)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

ΛΥΣΗ

i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{4x}=\dfrac{3\cdot 5+5}{4\cdot 5}=\dfrac{20}{20}=1$

ii) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)=\sqrt{8-4}+\sqrt{8+1}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$

iii) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}(x-3)=-6$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $f(x)=x^3-3x$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$.

2. Αν $\varphi(t)=t^2-5t+6$, να υπολογίσετε τις τιμές $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$. Για ποιες τιμές του t είναι $\varphi(t)=0$;

3. Αν $h(\theta)=\text{συν}\theta-\text{ημ}\theta$, να υπολογίσετε τις τιμές $h(0)$ και $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Για ποιες τιμές της γωνίας $\theta\in[0,\ 2\pi]$ είναι $h(\theta)=0$;

4. Αν $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x^2$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$ και $f(e)$.

5. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x}{(x-1)(x-2)}$;

6. Για ποιες τιμές του x είναι αρνητική η συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-7)$; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sigma(x)=\sqrt{(x-3)(x-7)}$;

7. Αν $f(x)=3x^2-2x-1$ και $g(x)=2x-1$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

8. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+4)$ ii) $\lim\limits_{x\to -2}[(2x-1)(x+4)]$ iii) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)$ v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(3\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

9. Να υπολογίσετε τα όρια:

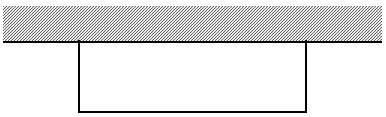
i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3(x-2)}$ ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2}{x^2+1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}[(x+1)\sigma\upsilon\nu x]$

iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$ v) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$ vi) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, να δείξετε ότι $f(x)+f(-x)=1$.

2. Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 100 m, μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι *x*, να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του *x*.



3. Ένα κυλινδρικό φλυτζάνι, ανοικτό από πάνω, κατασκευάζεται έτσι ώστε το ύψος του και το μήκος της βάσης του να έχουν άθροισμα 20 cm. Αν το φλυτζάνι έχει ύψος *h* cm, να εκφράσετε τον όγκο του ως συνάρτηση του *h*. Αν η ακτίνα της βάσης του είναι *r*, να εκφράσετε το εμβαδόν της επιφάνειάς του ως συνάρτηση του *r*.

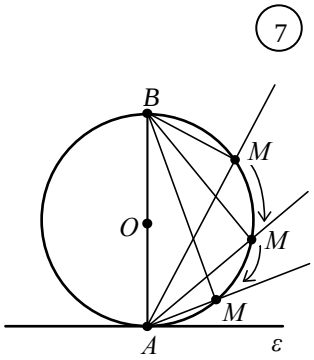
4. Σε ένα τρίγωνο *ΑΒΓ* είναι $AB=A\Gamma=10$. Αν $A\hat{B}\Gamma=\theta$, να εκφράσετε το ύψος *υ* του τριγώνου από την κορυφή *Β*, καθώς και το εμβαδόν του ως συνάρτηση του *θ*.

5. Να δείξετε ότι

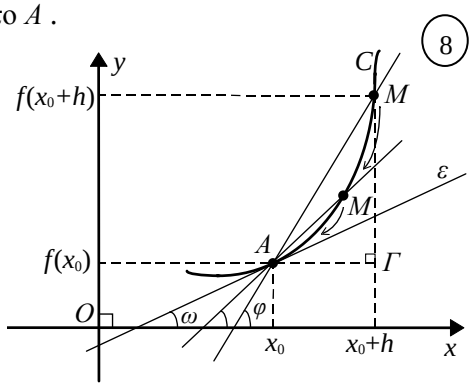
i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\dfrac{1}{2}$.

1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Εφαπτομένη Καμπύλης



Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου (O, R) σε ένα σημείο του A είναι η ευθεία ε που είναι κάθετη στην ακτίνα OA στο σημείο A. Έστω M ένα άλλο σημείο του κύκλου. Επειδή το τρίγωνο MAB είναι ορθογώνιο στο M, το άθροισμα των γωνιών του A και B είναι 90°. Αν υποθέσουμε ότι το M κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει το A, η γωνία B τείνει να γίνει μηδενική, οπότε η γωνία A τείνει να γίνει ορθή. Δηλαδή η τέμνουσα AM τείνει να γίνει κάθετη στην OA που σημαίνει ότι τείνει να συμπέσει με την εφαπτομένη ε. Θα μπορούσαμε επομένως να ορίσουμε ως εφαπτομένη του κύκλου (O, R) στο σημείο A, την οριακή θέση της τέμνουσας AM, καθώς το M κινούμενο πάνω στον κύκλο τείνει να συμπέσει με το A.



Τον ισοδύναμο αυτό ορισμό της εφαπτομένης ενός κύκλου θα τον χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της.

Έστω λοιπόν f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης C.

Παίρνουμε και ένα άλλο σημείο $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$ της C με $h \neq 0$.

Παρατηρούμε ότι καθώς το M κινούμενο πάνω στη C πλησιάζει το A, όταν δηλαδή $h \to 0$, τότε η ευθεία AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε η οποία λέγεται εφαπτομένη (tangent) της C στο A. Από το σχήμα έχουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της AM είναι

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{M\Gamma}{A\Gamma} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο A θα είναι

$$\varepsilon\varphi\omega = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Στιγμιαία Ταχύτητα

Όπως έχει διαπιστωθεί πειραματικά από τον Γαλιλαίο πριν από τέσσερις αιώνες, το διάστημα S που διανύεται σε χρόνο t sec (s) από ένα σώμα που αφήνεται να πέσει στο κενό εκφράζεται από τον τύπο

$$S(t) = \frac{1}{2} g t^2 ,$$

όπου $g \cong 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$ είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας. Ποια όμως θα είναι η ταχύτητα ενός σώματος που πέφτει ελεύθερα σε ένα οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς του, για παράδειγμα όταν $t = 5$ s;
Μπορούμε να προσεγγίσουμε το ζητούμενο μέγεθος υπολογίζοντας τη *μέση ταχύτητα* σε ένα μικρό χρονικό διάστημα για παράδειγμα του ενός δεκάτου του δευτερολέπτου, από $t = 5\,\mathrm{s}$ στο $t = 5{,}1\,\mathrm{s}$. Έχουμε:

$$\text{Μέση ταχύτητα} = \frac{\text{διανυθέν διάστημα}}{\text{χρόνος}} = \frac{S(5{,}1) - S(5)}{0{,}1}$$

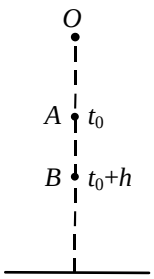
$$= \frac{4{,}905(5{,}1)^2 - 4{,}905 \cdot 5^2}{0{,}1} = 49{,}5405\,\mathrm{m/s}.$$

Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει τα αποτελέσματα όμοιων υπολογισμών της μέσης ταχύτητας για ολοένα και μικρότερα χρονικά διαστήματα.

Χρονικό διάστημα	Μέση ταχύτητα
$5 \le t \le 6$	53,955
$5 \le t \le 5{,}1$	49,5405
$5 \le t \le 5{,}05$	49,29525
$5 \le t \le 5{,}01$	49,09905
$5 \le t \le 5{,}001$	49,054905
$5 \le t \le 5{,}0001$	49,050491
$5 \le t \le 5{,}00001$	49,050049

Φαίνεται ότι καθώς μικραίνει το χρονικό διάστημα, η μέση ταχύτητα πλησιάζει ολοένα και περισσότερο στην τιμή 49,05 m/s. Η οριακή αυτή τιμή των μέσων ταχυτήτων σε ολοένα και μικρότερα χρονικά διαστήματα με ένα άκρο το $t = 5$ ορίζεται ως η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος όταν $t = 5\,\mathrm{s}$. Έτσι η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος ύστερα από χρόνο 5 s θα είναι $\upsilon = 49{,}05\,\mathrm{m/s}$.

9



Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι το σώμα ύστερα από t_0 βρίσκεται στο σημείο A και ας εξετάσουμε πόσο

αυξάνεται το διανυόμενο διάστημα, όταν ο χρόνος αυξηθεί κατά h. Το κινητό διανύει σε χρόνο t_0 διάστημα

$$S_1 = OA = S(t_0) = \frac{1}{2} g t_0^2$$

και σε χρόνο $t_0 + h$ διάστημα

$$S_2 = OB = S(t_0 + h) = \frac{1}{2} g (t_0 + h)^2 = \frac{1}{2} g t_0^2 + \frac{1}{2} g (2t_0 h + h^2) .$$

Άρα, η αύξηση του διαστήματος σε χρόνο h είναι

$$\Delta S = S_2 - S_1 = AB = \frac{1}{2} g (2t_0 h + h^2)$$

και η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα από t_0 σε $t_0 + h$ θα είναι

$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta S}{(t_0 + h) - t_0} = \frac{\frac{1}{2} g (2t_0 \cdot h + h^2)}{h} = g t_0 + \frac{1}{2} g h .$$

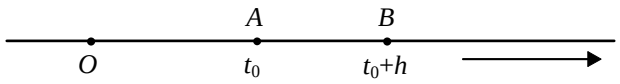
Καθώς όμως ελαττώνεται το h πλησιάζοντας το μηδέν, χωρίς ποτέ να γίνεται ίσο με το μηδέν, η μέση ταχύτητα θα πλησιάζει όλο και περισσότερο στο $g t_0$. Την οριακή αυτή τιμή τη λέμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού στη χρονική στιγμή t_0 ή απλώς ταχύτητα του κινητού στο t_0.

Επομένως, η ταχύτητα υ του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι

$$\upsilon = \lim_{h \to 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta S}{h} = g t_0 .$$

Προφανώς όταν $t_0 = 5$, τότε $\upsilon = 9{,}81 \cdot 5 = 49{,}05 \text{ m/s}$, τιμή την οποία προσεγγίσαμε και προηγουμένως με αριθμητικούς υπολογισμούς.
Την ίδια πορεία μπορούμε να ακολουθήσουμε και για τον υπολογισμό της ταχύτητας ενός κινητού το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, στη γενικότερη περίπτωση που η τετμημένη του ή, όπως λέμε στη Φυσική, η θέση του τη χρονική στιγμή t εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$.

10



Για να βρούμε την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0, θεωρούμε το χρονικό διάστημα από t_0 έως $t_0 + h$ με $h \neq 0$. Το κινητό σε χρόνο h μετατοπίζεται κατά $\Delta x = x_2 - x_1 = f(t_0 + h) - f(t_0)$. Επομένως, η μέση

ταχύτητα του κινητού στη διάρκεια του χρονικού διαστήματος h θα είναι

$$\overline{\upsilon} = \frac{\Delta x}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Αν σκεφτούμε όπως στην προηγούμενη ειδική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι

$$\upsilon = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Δηλαδή θα είναι το όριο του λόγου της μεταβολής της τετμημένης του κινητού προς την αύξηση του χρόνου, καθώς η τελευταία τείνει προς το μηδέν χωρίς στην πραγματικότητα να γίνεται ίση με το μηδέν.

Παράγωγος της f στο $x = x_0$

Και τα δύο προηγούμενα προβλήματα, μολονότι αναφέρονται σε διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους, το πρώτο στη Γεωμετρία και το δεύτερο στη Μηχανική, οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Υπάρχουν όμως και πολλά άλλα προβλήματα διαφορετικής φύσεως, όπως, για παράδειγμα, είναι ο ορισμός της έντασης ενός ρεύματος, της ταχύτητας μιας χημικής αντίδρασης, του οριακού κόστους στην Οικονομία, τα οποία οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της ιδίας μορφής.
Αν το προηγούμενο όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0**, συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται "f τονούμενο του x_0". Έχουμε λοιπόν:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 3x^2$ στο σημείο 4, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά $f(4+h) - f(4)$:

$$\begin{aligned} f(4+h) - f(4) &= 3(4+h)^2 - 3 \cdot 4^2 \\ &= 3(4^2 + 8h + h^2 - 4^2) \\ &= 3h(8+h) \end{aligned}$$

- Για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$:

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{3h(8+h)}{h} = 24+3h.$$

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}(24+3h) = 24.$$

Άρα, $f'(4)=24$.

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής** (rate of change) του $y=f(x)$ ως προς το x, όταν $x=x_0$. Έτσι, σύμφωνα με όσα εκθέσαμε στην προηγούμενη παράγραφο:

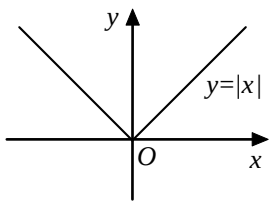
- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x=x_0$.

- Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0

$$\upsilon(t_0)=f'(t_0),$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t=t_0$.

ΣΧΟΛΙΟ 11



Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο. Όπως είναι, για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=|x|$ στο $x_0=0$. Διότι όταν $h<0$, έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1,$$

ενώ όταν $h>0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h} = 1$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται με τη συνάρτηση $x(t) = t^2 + t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

α) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:
(i) [0, 2] (ii) [0, 1] (iii) [0, 0,5] (iv) [0, 0,1].

β) Να βρεθεί η ταχύτητα όταν $t = 0$.

γ) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = x(t)$.

δ) Να σχεδιαστούν οι τέμνουσες από το $O(0, 0)$ της γραφικής παράστασης με συντελεστή διεύθυνσης τις μέσες ταχύτητες του ερωτήματος (α).
Επίσης, να βρεθεί και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $x = x(t)$ στο σημείο της με $t = 0$.

ΛΥΣΗ

α) Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας έχουμε

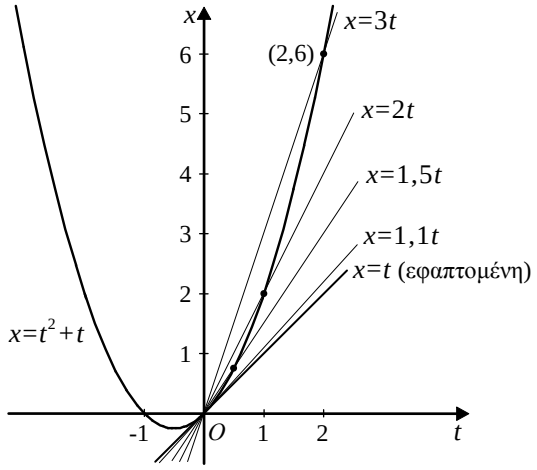
i) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(2) - x(0)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3\,\text{m/s}$ ii) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(1) - x(0)}{1} = \dfrac{2}{1} = 2\,\text{m/s}$

iii) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(0{,}5) - x(0)}{0{,}5} = 1{,}5\,\text{m/s}$ iv) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(0{,}1) - x(0)}{0{,}1} = 1{,}1\,\text{m/s}$

β) Η ταχύτητα υ όταν $t = 0$, είναι

$$\upsilon = \lim_{h \to 0} \frac{x(0+h) - x(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \to 0}(h+1) = 1\,\text{m/s}\,.$$

γ) Αν σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ο οριζόντιος άξονας παριστάνει το χρόνο t και ο κατακόρυφος άξονας το $x(t)$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x(t) = t^2 + t = \left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ είναι, σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου, μια παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $t = -\dfrac{1}{2}$. Έτσι, έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση.



δ) Επειδή οι τέμνουσες διέρχονται από το σημείο $O(0,\,0)$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης 3, 2, 1,5 και 1,1, οι εξισώσεις τους είναι $x=3t$, $x=2t$, $x=1{,}5t$ και $x=1{,}1t$ αντιστοίχως. Οι ευθείες αυτές έχουν σχεδιαστεί στο παραπάνω σχήμα .

Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της με $t=0$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με τη στιγμιαία ταχύτητα όταν $t=0$, δηλαδή ίσο με 1. Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται και από την αρχή των αξόνων, η εξίσωσή της είναι $x=t$, δηλαδή είναι η διχοτόμος της γωνίας των θετικών ημιαξόνων.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3}{x}$.

(i) Να βρεθεί η $f'(3)$.

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $(3,\,f(3))$ και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη αυτή.

ΛΥΣΗ

(i) Έχουμε $f(3+h)-f(3)=\dfrac{3}{3+h}-\dfrac{3}{3}=\dfrac{3-3-h}{3+h}=-\dfrac{h}{3+h}$ και για $h\neq 0$

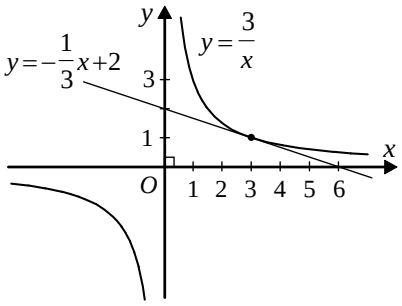
$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{-\dfrac{h}{3+h}}{h}=\frac{-h}{h(3+h)}=-\frac{1}{3+h}.$$

Επομένως

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{3+h}\right)=-\frac{1}{3}.$$

(ii) Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της με $x=3$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $f'(3)$. Επομένως, η εξίσωσή της είναι

$$y=-\frac{1}{3}x+\beta .$$



Επειδή όμως το σημείο $(3,\ f(3))=(3,\ 1)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε

$$1=-\frac{1}{3}\cdot 3+\beta$$
$$1=-1+\beta$$
$$\beta=2 .$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=-\frac{1}{3}x+2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

i) $f(x)=3x+1$ στο $x=3$

ii) $g(x)=x^2+5$ στο $x=-2$

iii) $\sigma(x)=x^2+2x$ στο $x=4$

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(t)=\frac{1}{t+1}$ στο $t=1$.

3. i) Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας r είναι $L=2\pi r$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του L ως προς r, όταν $r=3$.

ii) Το εμβαδόν E ενός κύκλου ακτίνας r είναι $E=\pi r^2$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του E ως προς r, όταν $r=2$.

4. i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ενός τετραγώνου πλευράς x ως προς x όταν $x = 5$.
ii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός κύβου πλευράς x ως προς x, όταν $x = 10$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:
i) $f(x) = x^2$ στο $A(3,\ f(3))$
ii) $f(x) = 2\sqrt{x}$, στο $A(4,\ f(4))$.

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός Παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος** (derivative) **της f και συμβολίζεται με f'**.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = 3x^2$, τότε έχουμε:

$$f(x+h) - f(x) = 3(x+h)^2 - 3x^2 = 3(x^2 + 2xh + h^2 - x^2) = 3h(2x+h),$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3h(2x+h)}{h} = 6x + 3h.$$

Επομένως, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0}(6x + 3h) = 6x$.

Έτσι, η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο x_0 είναι ίση με την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Για παράδειγμα, η παράγωγος της $f(x) = 3x^2$ στο $x_0 = 4$ είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης $f'(x) = 6x$ στο $x_0 = 4$, δηλαδή $f'(4) = 6 \cdot 4 = 24$.

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f''.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητά του θα είναι

$$\boldsymbol{v(t) = x'(t)}.$$

Αν η συνάρτηση υ είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει

$$\alpha(t) = \upsilon'(t) \quad \text{ή} \quad \text{ισοδύναμα} \quad \alpha(t) = x''(t).$$

Παραγώγιση Βασικών Συναρτήσεων

Έως τώρα η παραγώγιση μιας συνάρτησης f γινόταν με τη βοήθεια του τύπου $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε μερικούς κανόνες που διευκολύνουν τον υπολογισμό της παραγώγου πιο πολύπλοκων συναρτήσεων.

- **Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$**

12

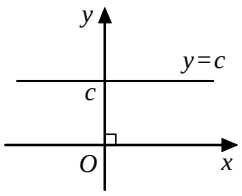
Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

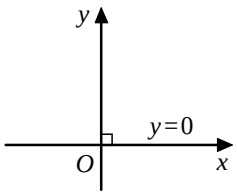
και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

οπότε $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$.



(α)



(β)

Άρα $\mathbf{(c)' = 0}$.

13

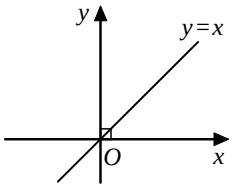
- **Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$**

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$, και για $h \neq 0$,

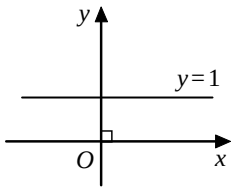
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Επομένως $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 1 = 1$.

Άρα $\mathbf{(x)' = 1}$.



(α)



(β)

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^{\rho}$**

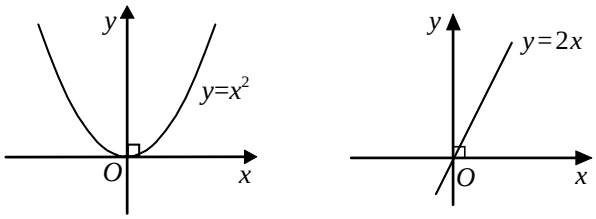
Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h,$$

και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(2x+h)h}{h} = 2x+h$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$.

Άρα $\boldsymbol{(x^2)' = 2x}$ (14)



(α) (β)

Αποδεικνύεται ότι

$$\boldsymbol{(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}}, \text{ όπου } \nu \text{ φυσικός}.$$

Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός. Για παράδειγμα

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2},$$

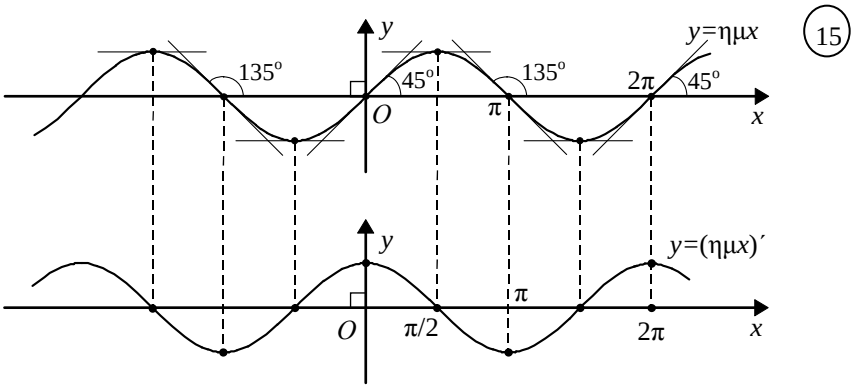
$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2\cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Άρα $\boldsymbol{(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}}$, όπου ρ ρητός αριθμός.

- **Η παράγωγος του ημx και του συνx.**

Έστω η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ (σχήμα 15). Αν λάβουμε υπόψη ότι η τιμή της $f'(x)$ σε ένα σημείο $x = x_0$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, μπορούμε να σχεδιάσουμε προσεγγιστικά τη γραφική παράσταση της f'. Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f' μοιάζει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης συνx.



Πράγματι, για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ αποδεικνύεται ότι

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x\,.$$

Επίσης για τη συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ αποδεικνύεται ότι

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x\,.$$

- **Η παράγωγος του e^x και του $\ln x$**

Για την εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση, με βάση τον αριθμό e, αποδεικνύεται ότι

$$(e^x)' = e^x \quad \text{και} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}\,.$$

Κανόνες Παραγώγισης

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$**

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε

$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$, και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x)}{h} = c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = cf'(x)\,.$$

Άρα $\quad (c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)\,.$

Για παράδειγμα $(3x^5)' = 3(x^5)' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$,

$$\left(\frac{4}{x}\right)' = 4\left(\frac{1}{x}\right)' = 4\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-4}{x^2}$$

και $(6\ln x)' = 6(\ln x)' = 6\dfrac{1}{x} = \dfrac{6}{x}$.

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$**

Έστω η συναρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))$$

$$= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)),$$

και για $h \neq 0$, $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$.

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Άρα $\boldsymbol{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$

Για παράδειγμα $(x^4 + 3x)' = (x^4)' + (3x)' = 4x^3 + 3$

και $\left(x^2 - x + \dfrac{1}{x}\right)' = (x^2)' - (x)' + \left(\dfrac{1}{x}\right)' = 2x - 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

- **Παράγωγος των συναρτήσεων $f(x) \cdot g(x)$ και $\dfrac{f(x)}{g(x)}$**

Για το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

$$\boldsymbol{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}.$$

Για παράδειγμα

$$(x \cdot \eta\mu x)' = (x)'\eta\mu x + x(\eta\mu x)' = \eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

και

$$\left(\frac{x+1}{x^2}\right)' = \frac{(x+1)'x^2 - (x+1)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-(x+2)}{x^3}$$

- **Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης**

Γνωρίζουμε ήδη πώς παραγωγίζονται οι συναρτήσεις x^ν, ημx, συνx, e^x και $\ln x$. Επίσης, με τη βοήθεια των κανόνων παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου μπορούμε να παραγωγίσουμε και πολυπλοκότερες συναρτήσεις όπως για παράδειγμα τις $(x^3+1)^2$ και $(x^3+1)^3$ για τις οποίες έχουμε

$$((x^3+1)^2)' = ((x^3+1)(x^3+1))' = 3x^2(x^3+1) + 3x^2(x^3+1) = 6x^2(x^3+1) \text{ και}$$

$$((x^3+1)^3)' = [(x^3+1)^2(x^3+1)]' = 6x^2(x^3+1)(x^3+1) + (x^3+1)^2 \cdot 3x^2 = 9x^2(x^3+1)^2$$

Πώς όμως θα παραγωγίσουμε μια συνάρτηση όπως η $F(x) = \sqrt{x^2+1}$;
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $F(x)$ προκύπτει αν στην $f(x) = \sqrt{x}$ θέσουμε όπου x το $g(x) = x^2+1$. Είναι, δηλαδή, $F(x) = \sqrt{x^2+1} = f(g(x))$. Γι'αυτό η συνάρτηση F λέγεται **σύνθεση** της g με την f.
Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$\boldsymbol{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}.$$

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g.

Επομένως,

$$((x^3+1)^3)' = 3(x^3+1)^2(x^3+1))' = 3(x^3+1)^2 \cdot 3x^2 = 9x^2(x^3+1)^2.$$

Επίσης, επειδή όπως είδαμε, είναι $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, έχουμε:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ομοίως , $(\eta\mu(2x+1))' = \sigma\upsilon\nu(2x+1)\cdot(2x+1)' = 2\cdot\sigma\upsilon\nu(2x+1)$.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι βασικοί τύποι και κανόνες παραγώγισης.

$(c)' = 0$ $(x)' = 1$ $(x^\rho)' = \rho x^{\rho-1}$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ $(e^x)' = e^x$ $(\ell n x)' = \dfrac{1}{x}$	$(cf(x))' = cf'(x)$ $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων
i) $f(x) = \varepsilon\varphi x$ **ii)** $f(x) = \eta\mu^2 3x$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$f'(x) = (\varepsilon\varphi x)'$$

$$= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Άρα $\boldsymbol{(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$.

ii) Έχουμε

$$f'(x) = [(\eta\mu 3x)^2]' = 2 \cdot \eta\mu 3x \cdot (\eta\mu 3x)' = 2 \cdot \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x \cdot (3x)'$$
$$= 3 \cdot 2\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x = 3 \cdot \eta\mu(2 \cdot 3x) = 3\eta\mu 6x\,,$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha$.

2. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο *t*.

ii) Ποια είναι η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 2 s και ποια σε χρόνο 4 s;

iii) Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;

iv) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;

v) Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5 s.

ΛΥΣΗ

i) Η ταχύτητα είναι

$$\upsilon(t) = x'(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t)' = 3t^2 - 12t + 9\,.$$

ii) Η ταχύτητα του σημείου
σε χρόνο $t = 2s$ είναι $\upsilon(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3\,\text{m/s}$
και σε χρόνο $t = 4s$ είναι $\upsilon(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9\,\text{m/s}$.

iii) Το σημείο είναι ακίνητο, όταν $\upsilon(t) = 0$, δηλαδή όταν

$$3t^2 - 12t + 9 = 0$$
$$t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$t = 1 \quad \text{ή} \quad t = 3\,.$$

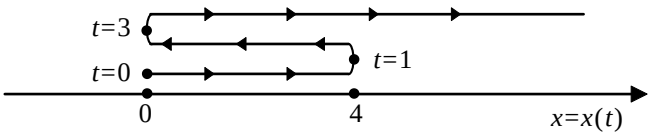
Άρα, το σημείο είναι ακίνητο ύστερα από 1 s και ύστερα από 3 s.

iv) Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση, όταν $\upsilon(t) > 0$, δηλαδή όταν

$$3t^2 - 12t + 9 > 0$$
$$t^2 - 4t + 3 > 0$$
$$(t-1)(t-3) > 0$$
$$t < 1 \quad \text{ή} \quad t > 3\,.$$

Άρα, το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση στα χρονικά διαστήματα $t<1$ και $t>3$ (και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $1<t<3$) .

Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



v) Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι:

- Στη διάρκεια του πρώτου δευτερόλεπτου

$$S_1 = |x(1)-x(0)| = |4-0| = 4\,\text{m}.$$

- Από $t=1$ μέχρι $t=3$

$$S_2 = |x(3)-x(1)| = |0-4| = 4\,\text{m}$$

- Από $t=3$ μέχρι $t=5$

$$S_3 = |x(5)-x(3)| = |20-0| = 20\,\text{m}$$

Άρα, το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5s είναι

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4+4+20 = 28\,\text{m}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

(Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων στις ασκήσεις 1-18)

1. i) $f(x)=-5$ ii) $f(x)=x^4$ iii) $f(x)=x^9$.

2. i) $f(x)=x^{3/2}$ ii) $f(x)=x^{-3}$ iii) $f(x)=x^{-5}$.

3. i) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ii) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$, $x>0$.

4. i) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ii) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ iii) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$, $x>0$.

5. i) $f(x)=4x^3$ ii) $f(x)=6x^{-5}$ iii) $f(x)=-\dfrac{2}{5}x^{20}$.

6. i) $f(x)=\dfrac{-6}{\sqrt[4]{x}}$ ii) $f(x)=6x\sqrt{x}$.

7. i) $f(x)=x^4+3x^2$ ii) $f(x)=x^2+5+\dfrac{3}{x}$ iii) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

8. i) $f(x)=8x^3-\eta\mu x+5$ ii) $f(x)=6\sigma\upsilon\nu x-8(x^2+x)$.

9. i) $f(x)=(x^3+1)(x^4+1)$ ii) $f(x)=\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)$.

10. i) $f(x)=x\sigma\upsilon\nu x+3(x+1)(x-1)$ ii) $f(x)=4x^2\eta\mu x-3x^2\sigma\upsilon\nu x$.

11. i) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ ii) $f(x)==\dfrac{x}{\eta\mu x}$ iii) $f(x)=\dfrac{x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

12. i) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ ii) $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

13. i) $f(x)=(x-1)^5$ ii) $f(x)=(2x+1)^5$ iii) $f(x)=(2x^2-3x)^5$.

14. i) $f(x)=\eta\mu^3 x$ ii) $f(x)=\eta\mu x^3$ iii) $f(x)=x\cdot\eta\mu 4x$ iv) $f(x)=\varepsilon\varphi 3x$.

15. i) $f(x)=\sqrt{2x^2-x}$ ii) $f(x)=\sqrt{1+\eta\mu x}$.

16. i) $f(x)=e^{3x}$ ii) $f(x)=e^{-x^2}$ iii) $f(x)=e^{\alpha x+\beta}$ iv) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$.

17. i) $f(x)=\ln 2x$ ii) $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^3}$.

iii) $f(x)=\ln(\alpha x+\beta)$ iv) $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$.

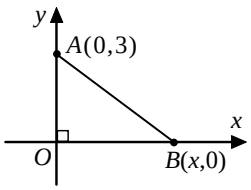
18. i) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ii) $f(x)=e^x\ln x$.

19. i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(t)=\dfrac{t^3}{t^2+1}$ στο σημείο της $A(3,\ f(3))$.

ii) Ομοίως της καμπύλης της συνάρτησης $f(\theta)=\dfrac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta}$ στο σημείο της $A\left(\dfrac{\pi}{3},\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

20. Το βάρος B σε γραμμάρια ενός θηλυκού ποντικιού ύστερα από t εβδομάδες δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $B(t)=1+\dfrac{1}{4}(t+2)^2$, όπου $t\le 8$. Να βρείτε το ρυθμό ανάπτυξης του ποντικιού: i) ύστερα από t εβδομάδες και ii) ύστερα από 1, 2 και 8 εβδομάδες.

21. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(0,3)$ και $B(x,\ 0)$ ως προς x όταν $x=10$.



22. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x(1-x)$ στο σημείο της $O(0,\ f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60^0.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Σε ποιά σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$ η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3x+5$;

2. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ που είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{0}y$.

4. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα έτσι ώστε η θέση του σε χρόνο t να δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 2t^2 + t$. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t και να προσδιορίσετε πότε το σώμα είναι ακίνητο. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος στις χρονικές αυτές στιγμές;

5. Αν $f(x) = A\text{συν}\omega x + B\text{ημ}\omega x$, να δείξετε ότι $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$.

6. Αν $f(x) = \alpha e^{px} + \beta e^{-px}$, να δείξετε ότι $f''(x) = p^2 f(x)$.

7. Αν $f(x) = e^{\mu x}$, να βρείτε το μ ώστε να ισχύει $f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) = 0$.

8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = 2\text{ημ}x \cdot \text{συν}x$ στο σημείο της με $x = \dfrac{\pi}{3}$.

9. Ο ρυθμός της φωτοσύνθεσης P ενός φυτού δίνεται από τον τύπο $P(I) = \dfrac{I}{\alpha + \beta I}$, $I \geq 0$, όπου I η ένταση του φωτός και α, β σταθερές. i) Να βρείτε την $P'(I)$ ή, όπως λέγεται, τη *φωτοχημική ικανότητα* του φυτού, καθώς και την $P'(0)$. ii) Να δείξετε ότι $P'(I) = \dfrac{1}{\alpha}\left[1 - \beta P(I)\right]^2$.

10. Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σε έναν κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο $y(t) = A\text{ημ}\omega t$, όπου t ο χρόνος και τα A, ω σταθερές.

i) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του t.

ii) Να δείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης y.

iii) Να δείξετε ότι, όταν η επιτάχυνση είναι 0, το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο.

1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Το Κριτήριο της Πρώτης Παραγώγου

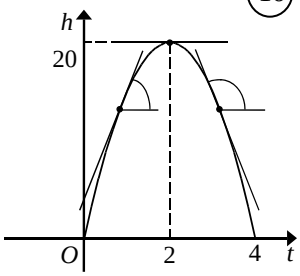
Σε προηγούμενες τάξεις χρειάστηκε να εφαρμόσουμε τις μεθόδους της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας για να επιλύσουμε προβλήματα στα οποία σκοπός ήταν να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε την τιμή ενός μεγέθους. Για παράδειγμα, μεταξύ όλων των ορθογωνίων με την ίδια περίμετρο βρήκαμε τις διαστάσεις εκείνου του ορθογωνίου που έχει το μέγιστο εμβαδόν και μεταξύ όλων των ορθογωνίων με το ίδιο εμβαδόν, αναζητήσαμε τις διαστάσεις εκείνου του ορθογωνίου που έχει την ελάχιστη περίμετρο. Βέβαια οι μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση των προβλημάτων αυτών δύσκολα μπορούν να εφαρμοστούν και για την επίλυση προβλημάτων άλλης μορφής. Με τη βοήθεια όμως της παραγώγου μπορούμε να διατυπώσουμε μια γενική μέθοδο προσδιορισμού της μέγιστης ή της ελάχιστης τιμής ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να βρούμε το μέγιστο ύψος στο οποίο μπορεί να φθάσει ένα σώμα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 20\,\text{m/s}$. Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\,\text{m/s}^2$, τότε, σύμφωνα με όσα μας διδάσκει η Φυσική, το ύψος h του σώματος ύστερα από t δευτερόλεπτα θα είναι

$$h(t) = 20t - 5t^2 = -5t^2 + 20t\,. \qquad (1)$$

Επομένως η γραφική παράσταση της $h(t)$ θα είναι μια παραβολή η οποία:

16



- Τέμνει τον άξονα των t στα σημεία $t = 0$ και $t = 4$.
- Παρουσιάζει μέγιστο για $t = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = 2$ που είναι ίσο με $h(2) = 20$.
- Είναι γνησίως αύξουσα για $t < 2$ και γνησίως φθίνουσα για $t > 2$.

Ας δούμε τώρα πώς μεταβάλλεται το πρόσημο της παραγώγου $h'(t) = -10t + 20$ στο διάστημα $[0,\ 4]$.

Λύνοντας την ανίσωση $h'(t) > 0$, βρίσκουμε ότι αριστερά του 2 όπου η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, η παράγωγός της είναι θετική, ενώ δεξιά του 2 όπου η συνάρτηση είναι φθίνουσα, η παράγωγός της είναι αρνητική.

t	0		2		4
$h'(t)$		+	0	−	

Από τα παραπάνω φαίνεται να υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στη μονοτονία και στην παράγωγο μιας συνάρτησης.

Αποδεικνύεται ότι:

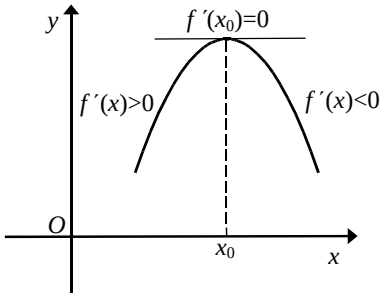
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Παρατηρούμε ακόμα ότι στο σημείο $t = 2$ όπου η h παρουσιάζει μέγιστο, η h' μηδενίζεται, ενώ εκατέρωθεν του $t = 2$ η h' αλλάζει πρόσημο.

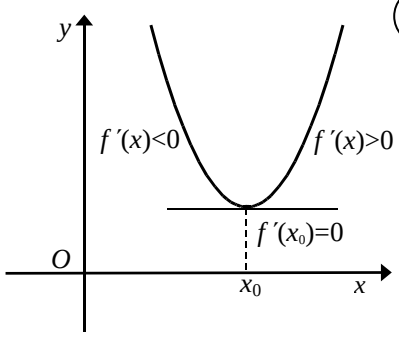
Αποδεικνύεται ότι:

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

17



(α)



(β)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$f'(x)=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)'=2\alpha x+\beta.$$

$$f'(x)=0 \iff 2\alpha x+\beta=0 \iff x=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

$$f'(x)>0 \iff 2\alpha x+\beta>0 \iff 2\alpha x>-\beta.$$

Επομένως, αν $\alpha>0$, τότε $f'(x)>0$ για $x>-\frac{\beta}{2\alpha}$ και $f'(x)<0$ για $x<-\frac{\beta}{2\alpha}$.

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ενώ αν $\alpha<0$, τότε $f'(x)>0$ για $x<-\frac{\beta}{2\alpha}$ και $f'(x)<0$ για $x>-\frac{\beta}{2\alpha}$.

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Άρα, η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει ελάχιστο αν $\alpha>0$ και μέγιστο αν $\alpha<0$. Η τιμή του μεγίστου ή του ελαχίστου είναι ίση με $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=\alpha\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)^2+\beta\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)+\gamma=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$.

2. Ένας πληθυσμός 1000 βακτηριδίων εισάγεται σε ένα θρεπτικό μέσον και αναπτύσσεται σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$p(t)=1000+\frac{1000t}{100+t^2},$$

όπου t ο χρόνος σε ώρες. Σε πόσο χρόνο ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα είναι μέγιστος και ποιος θα είναι ο πληθυσμός αυτός;

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$p'(t)=\frac{1000(100+t^2)-1000t\cdot 2t}{(100+t^2)^2}=\frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2}.$$

$$p'(t)=0 \Leftrightarrow 1000(100-t^2)=0 \Leftrightarrow t=10 \quad \text{ή} \quad t=-10.$$

Επειδή ο χρόνος t είναι θετικός, η ρίζα $t=-10$ απορρίπτεται.

$$p'(t)>0 \Leftrightarrow \frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2}>0 \Leftrightarrow 100-t^2>0 \Leftrightarrow t^2-100<0$$

$$\Leftrightarrow (t+10)(t-10)<0 \Leftrightarrow -10<t<10.$$

Επομένως $p'(t)>0$ για $0<t<10$.

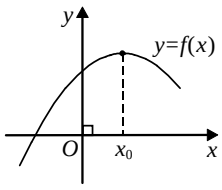
Έχουμε λοιπόν $p'(10)=0$, $p'(t)>0$ στο (0, 10) και $p'(t)<0$, στο (10, $+\infty$).

Άρα ύστερα από 10 ώρες θα παρουσιαστεί ο μέγιστος πληθυσμός βακτηριδίων που θα είναι ίσος με

$$p(10)=1000+\frac{1000\cdot 10}{100+10^2}=1000+\frac{1000\cdot 10}{200}=1050.$$

Το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου

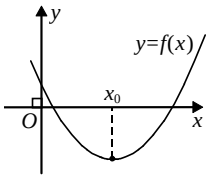
18



- Έστω μια συνάρτηση f, της οποίας η καμπύλη είναι μία παραβολή και η οποία για $x=x_0$ παρουσιάζει μέγιστο. Τότε, για τιμές κοντά στο x_0, η συνάρτηση είναι αύξουσα για $x\le x_0$ και φθίνουσα για $x\ge x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η f' από θετική γίνεται αρνητική, δηλαδή είναι φθίνουσα συνάρτηση. Αφού λοιπόν η f' είναι φθίνουσα, η παράγωγός της, δηλαδή η f'' θα είναι αρνητική.

Επομένως, $f''(x_0)<0$.

19



- Έστω τώρα η συνάρτηση f, της οποίας η καμπύλη είναι μια παραβολή και η οποία για $x=x_0$ παρουσιάζει ελάχιστο. Τότε, για τιμές του x κοντά στο x_0, η συνάρτηση είναι φθίνουσα για $x\le x_0$ και αύξουσα για $x\ge x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η f' από αρνητική γίνεται θετική, δηλαδή είναι

αύξουσα συνάρτηση. Άρα, η παράγωγος της f', δηλαδή η f'' θα είναι θετική. Επομένως, $f''(x_0) > 0$.
Αποδεικνύεται ότι:

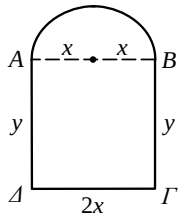
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει (τοπικό) μέγιστο στο $x = x_0$.
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο στο $x = x_0$.

ΣΧΟΛΙΟ

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) = 0$, τότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο της 2ης παραγώγου για τον προσδιορισμό των ακροτάτων της f.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ένα παράθυρο έχει το διπλανό σχήμα και αποτελείται από ένα ορθογώνιο που περικλείεται στο άνω μέρος από ένα ημικύκλιο. Το παράθυρο έχει περίμετρο 30 μέτρα. Να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει ώστε να μπαίνει από αυτό όσο γίνεται περισσότερο φως.



ΛΥΣΗ

- Έστω x η ακτίνα του ημικυκλίου. Τότε $AB = \Gamma\Delta = 2x$. Αν $A\Delta = B\Gamma = y$, έχουμε:

$$y + 2x + y + \frac{1}{2} \cdot 2\pi x = 30$$

$$2y = 30 - 2x - \pi x \qquad (1)$$

Η μεγαλύτερη ποσότητα φωτός θα διέρχεται από το παράθυρο, όταν το εμβαδόν του είναι μέγιστο.
Αν E το εμβαδόν του παραθύρου, τότε

$$E = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 = x(30 - 2x - \pi x) + \frac{1}{2}\pi x^2 = 30x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2,$$

δηλαδή $$E(x) = 30x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2 .$$

- Έχουμε $E'(x) = 30 - (4+\pi)x$ και $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{30}{4+\pi}$.

Επειδή $E''(x) = -(4+\pi) < 0$, συμπεραίνουμε ότι για $x = \dfrac{30}{4+\pi}$ η συνάρτηση έχει τη μέγιστη τιμή της. Για την τιμή αυτή του x από την (1) έχουμε

$$2y = 30 - (2+\pi)\cdot\frac{30}{4+\pi} = \frac{60}{4+\pi} \quad \text{και επομένως} \quad y = \frac{30}{\pi+4}.$$

Άρα για $x = y = \dfrac{30}{\pi+4} \approx 4{,}2\,\text{m}$, το παράθυρο έχει το μέγιστο εμβαδό.

2. Το κέρδος *P* σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου ορισμένου τύπου και ο χρόνος παραγωγής του *t* σε ώρες σχετίζονται με τον τύπο:

$$\boldsymbol{P(t) = 20\left(200 - \frac{250}{t} - t^2\right), \quad t > 3}.$$

Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $P'(t) = 20\left(\dfrac{250}{t^2} - 2t\right)$. Επομένως

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{250}{t^2} - 2t = 0 \Leftrightarrow t^3 = 125 \Leftrightarrow t = 5 .$$

Θα εξετάσουμε αν η τιμή $t = 5$ αντιστοιχεί σε μέγιστο κέρδος με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου.
Έχουμε

$$P''(t) = 20\left(\frac{250}{t^2} - 2t\right)' = 20\left(-\frac{500}{t^3} - 2\right) = -20\left(\frac{500}{t^3} + 2\right) < 0, \text{ αφού } t > 3 .$$

Άρα για $t = 5$ έχουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος που είναι ίσο με

$$P(5) = 20(200 - 50 - 25) = 20\cdot 125 = 2500 \text{ ευρώ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων
i) $f(x)=x^2-2x$ ii) $f(x)=-3x^2+6$ iii) $f(x)=x^2-2x+4$.

2. Ομοίως των συναρτήσεων
i) $f(x)=x^3-6x^2+5$ ii) $f(x)=-x^3+3x+1$.

3. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα
i) $f(x)=2x^3$ ii) $f(x)=-x^3+16$ iii) $f(x)=x^3-3x^2+3x-10$
iv) $f(x)=-x^3+3x^2-5x-11$.

4. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι ίσο με 40. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.

5. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 100m^2 ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο;

6. Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τετράγωνη βάση και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει όγκο 32 dm^3. Να βρείτε ποιές πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού, ώστε για την κατασκευή του να χρειάζεται το ελάχιστο δυνατό υλικό.

7. Αν ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει επιφάνεια ίση με 12 dm^2, ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός όγκος του;

8. Να βρείτε το σημείο της ευθείας με εξίσωση $y=2x-3$ που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

9. Η ταχύτητα ενός κύματος μήκους λ μέσα στο νερό είναι $\upsilon=\kappa\sqrt{\frac{\lambda}{c}+\frac{c}{\lambda}}$, όπου κ και c θετικές σταθερές. Για ποιο μήκος κύματος έχουμε την ελάχιστη ταχύτητα;

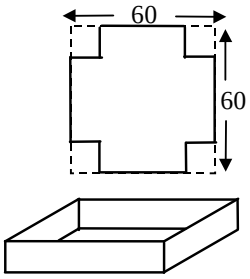
10. Να προσδιοριστούν δύο θετικοί αριθμοί με τις εξής ιδιότητες:
Το άθροισμά τους να είναι 10 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

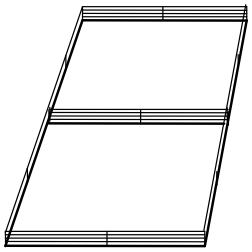
1. Αν $\upsilon = 100p(1+\ln r) - 100qr$, όπου p και q θετικές σταθερές, να δείξετε ότι το υ έχει τη μέγιστη τιμή του όταν $r = \dfrac{p}{q}$.

2. Αν $\upsilon = \kappa x^2 \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, όπου κ θετική σταθερά, να δείξετε ότι το υ έχει τη μέγιστη τιμή του όταν $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

3. Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 60 cm θα κατασκευαστεί ένα δοχείο, ανοικτό από πάνω, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα επάνω οι πλευρές. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε να έχει το μέγιστο όγκο.



4. Θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή 16000 m^2 σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις και να τη χωρίσουμε στη μέση. Ο φράχτης για την περίφραξη κοστίζει 900 δρχ./m και ο φράχτης για το χώρισμα 600 δρχ./m. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε, να έχουμε το ελάχιστο κόστος για την περίφραξη μαζί με το χώρισμα.



5. Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ να εγγράψετε το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

6. Ένα σύρμα μήκους λ κόβεται σε δύο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο αντιστοίχως. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι ελάχιστο, όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

7. Η έρευνα έχει δείξει ότι αν σε έναν ασθενή γίνει μια υποδόρια ένεση, τότε ύστερα από χρόνο t η συγκέντρωση y του φαρμάκου στο αίμα του δίνεται από τη συνάρτηση $y(t) = \dfrac{A}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$, όπου A, k_1 και k_2 θετικές σταθερές με $k_2 > k_1$. Να βρείτε το χρόνο t στον οποίο το φάρμακο θα παρουσιάσει τη μέγιστη συγκέντρωση.

8. Ένα ορισμένο όχημα όταν ταξιδεύει με ταχύτητα υ km/h, καταναλώνει την ώρα $6+0{,}0001\upsilon^3$ λίτρα καύσιμα.

i) Να βρείτε τη συνολική ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται για να διανύσει μια απόσταση 1000km με σταθερή ταχύτητα υ.

ii) Να βρείτε την τιμή του υ για την οποία έχουμε την οικονομικότερη κατανάλωση καυσίμων, καθώς και την ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται το όχημα για να διανύσει τα 1000km.
Να σχολιάσετε αν η απάντηση στο ερώτημα ii) είναι εφαρμόσιμη λόγω της μεγάλης απόστασης.

9. Δύο ηλεκτρικές αντιστάσεις πρέπει να έχουν άθροισμα 450Ω. Πως πρέπει να επιλεγούν ώστε όταν συνδεθούν εν παραλλήλω να δίνουν τη μέγιστη ολική αντίσταση;

10. Το μεσημέρι ένα ιστιοφόρο βρίσκεται 20 χιλιόμετρα βορείως ενός φορτηγού πλοίου. Το ιστιοφόρο ταξιδεύει νότια με 40 km/h, και το φορτηγό ανατολικά με 20 km/h. Αν η ορατότητα είναι 10 km, θα έχουν οι άνθρωποι των δύο πλοίων οπτική επαφή σε κάποια στιγμή;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν μια συρμάτινη ράβδος είναι ομογενής, τότε η γραμμική της πυκνότητα ρ ορίζεται ως η μάζα της ανά μονάδα μήκους $\left(\rho=\dfrac{m}{\ell}\right)$ και μετριέται σε χιλιόγραμμα ανά μέτρο (kgr/m). Όμως αν η ράβδος δεν είναι ομογενής και η μάζα της μετρούμενη από το αριστερό άκρο της μέχρι το σημείο που απέχει από το άκρο αυτό απόσταση x μέτρα δίνεται από τη συνάρτηση $m=f(x)$, τότε ορίζουμε ως γραμμική πυκνότητα ρ στο σημείο x το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, δηλαδή την παράγωγο της μάζας ως προς το μήκος.

Αν υποθέσουμε ότι για μια ράβδο η μάζα της δίνεται από τη συνάρτηση $m=f(x)=\sqrt{x}$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και η μάζα της σε χιλιόγραμμα, να βρεθεί

i) Η μέση πυκνότητα του τμήματος της ράβδου στο διάστημα $[1, 1{,}21]$

ii) Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου για $x=1$.

2. Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί v εργάτες δίνεται από τον τύπο:

$$C(x) = x^3 - 3vx^2 + 5v^3 \text{ σε χιλιάδες δρχ.}$$

Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $16 - v$ χιλιάδες δρχ.
Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

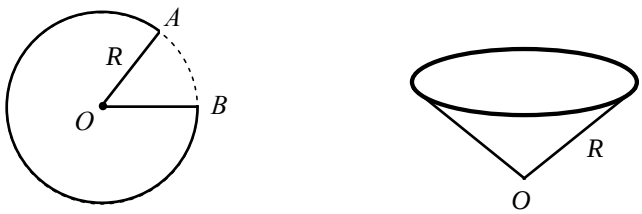
3. Σε ποιό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

4. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα δίνεται το σημείο $A(\alpha, \beta)$ του 1ου τεταρτημορίου. Μια ευθεία ε διέρχεται από το A και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες $0x$ και $0y$ στα p και q αντιστοίχως. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $p + q$ είναι ίση με $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$.

5. Ποιος κύλινδρος με άθροισμα διαμέτρου και ύψους 20 cm έχει το μέγιστο δυνατό όγκο;

6. Ένα κυλινδρικό δοχείο πρέπει να έχει χωρητικότητα 1lt. Να βρείτε τις διαστάσεις του οι οποίες ελαχιστοποιούν το κόστος του μετάλλου από το οποίο θα κατασκευαστεί το δοχείο.

7. Από έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας R αφαιρούμε έναν κυκλικό τομέα OAB και ενώνοντας τις ακτίνες OA και OB κατασκευάζουμε ένα κωνικό ποτήρι. Να βρείτε τη μέγιστη χωρητικότητα του ποτηριού.



8. Αν $C(x)$ είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η συνάρτηση C λέγεται **συνάρτηση κόστους**, το πηλίκο $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ λέγεται **μέσο κόστος** και το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{C(x+h) - C(x)}{h}$ λέγεται **οριακό κόστος**.

α) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο x το μέσο κόστος είναι ελάχιστο, τότε ισχύει:

οριακό κόστος=μέσο κόστος.

β) Μια εταιρεία εκτιμά ότι το κόστος (σε δολάρια) για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος είναι $C(x) = \frac{1}{1000} \cdot x^2 + 2x + 2600$.

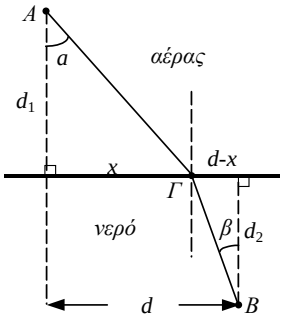
i) Να βρείτε το κόστος, το μέσο κόστος και το οριακό κόστος για την παραγωγή 1000 μονάδων, 2000 μονάδων και 3000 μονάδων.

ii) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής για το οποίο το μέσο κόστος είναι το χαμηλότερο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους;

9. Αν x μονάδες ενός προϊόντος είναι διαθέσιμες για πώληση, τότε η τιμή πώλησης $p(x)$ της μονάδας του προϊόντος λέγεται **συνάρτηση ζήτησης**. Από την πώληση x μονάδων του προϊόντος, τα συνολικά έσοδα είναι $R(x) = x \cdot p(x)$. Η συνάρτηση R λέγεται **συνάρτηση εσόδων** και η παράγωγος R' λέγεται **οριακή συνάρτηση εσόδων**. Επίσης από την πώληση x μονάδων του προϊόντος το συνολικό κέρδος είναι $P(x) = R(x) - C(x)$. Η συνάρτηση P καλείται **συνάρτηση κέρδους** και η παράγωγος P' καλείται **οριακή συνάρτηση κέρδους**.

α) Να αποδείξετε ότι αν το κέρδος για κάποιο x είναι μέγιστο, τότε τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος.

β) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη για μια εταιρεία, αν η συνάρτηση κόστους είναι $C(x) = 3800 + 5x - 0{,}001x^2$ και η συνάρτηση ζήτησης $p(x) = 50 - 0{,}01x$;



10. Έστω υ_1 η ταχύτητα του φωτός στον αέρα και υ_2 η ταχύτητα του στο νερό. Σύμφωνα με την **αρχή του Fermat**, μια ακτίνα φωτός από ένα σημείο A του αέρα φθάνει σε ένα σημείο B του νερού ακολουθώντας μια πορεία $AΓB$ η οποία ελαχιστοποιεί τον απαιτούμενο χρόνο. Να αποδείξετε ότι

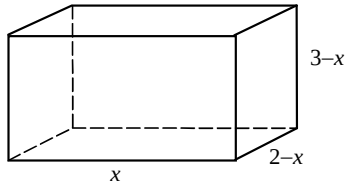
i) Ο χρόνος που χρειάζεται το φως για τη διαδρομή $AΓB$ είναι $t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + d_1^2}}{\upsilon_2}$

ii) Να υπολογίσετε την $t'(x)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

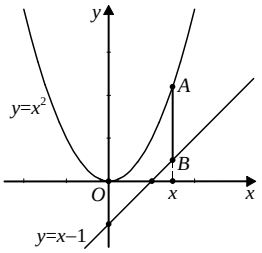
1. Ο όγκος του διπλανού ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου εκφράζεται με τη συνάρτηση $V(x) = x(2-x)(3-x)$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής είναι το διάστημα:



Α. $[0, +\infty)$ Β. $(0, 2)$ Γ. $(-\infty, 0]$ Δ. $[2, 3]$.

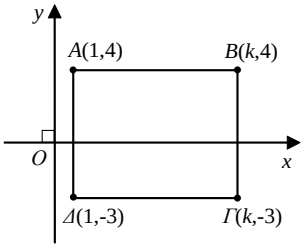
2. Στο διπλανό σχήμα το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι

Α. x Β. x^2 Γ. $x^2 - x + 1$ Δ. $x - 1 - x^2$.

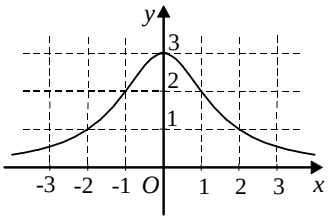


3. Το εμβαδόν του διπλανού ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 63. Η τιμή του κ είναι

Α. 8 Β. 2 Γ. -6 Δ. 10.

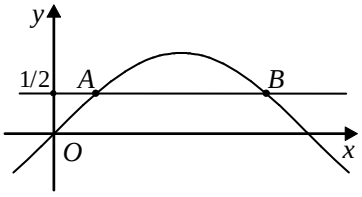


4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{6}{2+x^2}$. Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $\dfrac{6}{2+x^2} > 2$ είναι:



Α. $x > 2$ Β. $-1 < x < 1$ Γ. $-2 < x < 2$ Δ. $x < -2$.

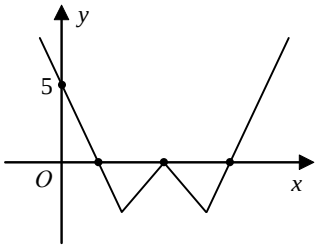
5. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Α και Β είναι τα σημεία τομής των καμπυλών των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \dfrac{1}{2}$. Το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι:



Α. $\dfrac{\pi}{2}$ Β. $\dfrac{\pi}{3}$ Γ. $\dfrac{2\pi}{3}$ Δ. $\dfrac{\pi}{6}$

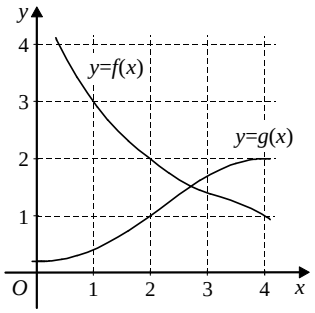
6. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το πλήθος των διακεκριμένων λύσεων της εξίσωσης $\left(f(x)\right)^2 = f(x)$ είναι:

Α. 2 Β. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. 6



7. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων f και g. Το άθροισμα $f(2)+g(2)$ είναι:

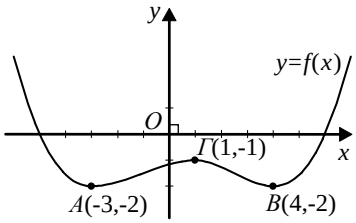
Α. 5 Β. 4 Γ. 3 Δ. 2



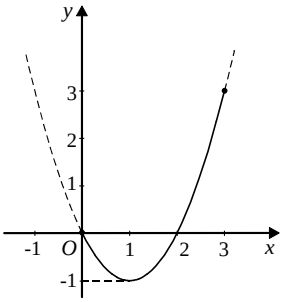
8. Η ευθεία $y=\kappa$ θέλουμε να τέμνει τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε 4 διαφορετικά σημεία. Τότε πρέπει:

Α. $\kappa > -1$ Β. $\kappa = -1$

Γ. $\kappa < -2$ Δ. $-2 < \kappa < -1$.

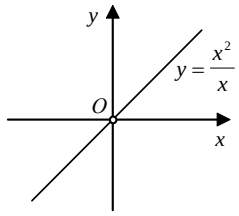


9. Με βάση τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x \ / \ A=[0,\,3]$ να γράψετε τα ακρότατα της συνάρτησης f.



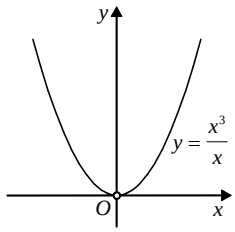
10. Για καθένα από τα παρακάτω όρια να χρησιμοποιήσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση για να βρείτε την τιμή του ή να προσδιορίσετε ότι δεν υπάρχει.

i)



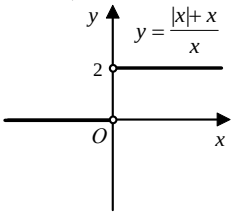
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}$$

ii)



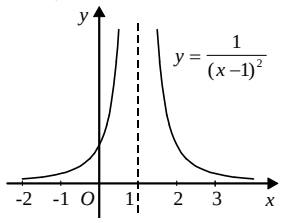
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}$$

iii)



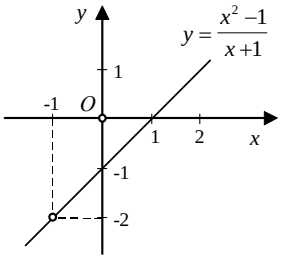
$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|+x}{x}$$

iv)



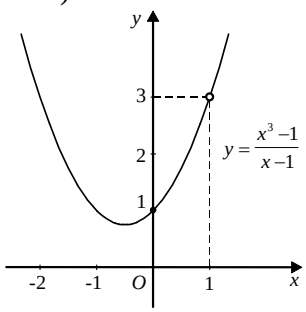
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$$

v)



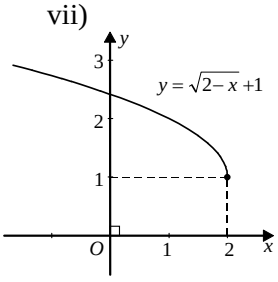
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$$

vi)



$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

vii)



$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{2-x}+1\right)$$

11. i) Αν $f(x) = -3x^2$ και $f'(\alpha) = 12$, ποια είναι η τιμή του α;

ii) Αν $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και $f'(\alpha) = -\dfrac{1}{9}$, ποιες τιμές μπορεί να έχει ο α;

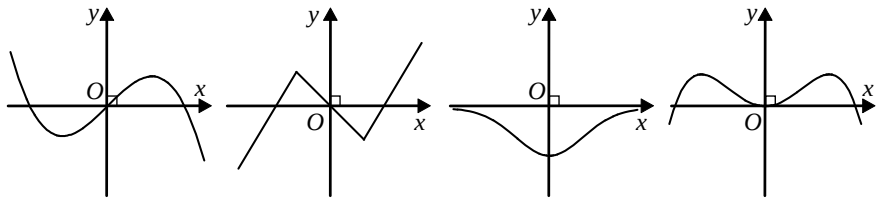
iii) Αν $f(x) = \eta\mu x$ και $f'(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ποιο είναι το σύνολο των τιμών του α;

12. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f'(3) = -6$ και $g'(3) = 5$ να βρείτε για $x = 3$ τις παραγώγους των συναρτήσεων

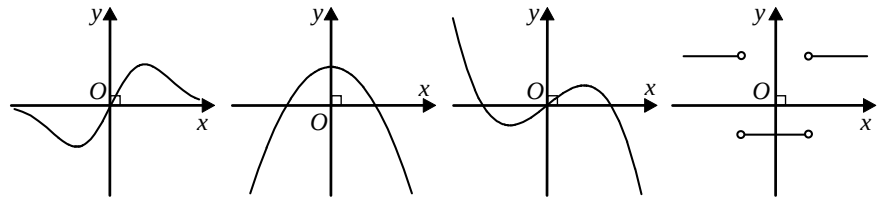
α) $f + g$ β) $f - g$ γ) $f \cdot g$ δ) $\dfrac{f}{g}$

13. Αν $h(x) = f(g(x))$ και $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ και $f'(6) = 7$, να βρείτε τον αριθμό $h'(3)$.

14. Στην πρώτη γραμμή του παρακάτω πίνακα υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις μερικών συναρτήσεων και στη δεύτερη γραμμή οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση στην παράγωγό της.



(1) (2) (3) (4)



(α) (β) (γ) (δ)

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Γ΄ Γενικού Λυκείου

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ
ΔΑΜΙΑΝΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ
ΣΒΕΡΚΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Γ΄ Τάξη Γενικού Λυκείου

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΤΗ

Το τεύχος που κρατάς έχει μια ιδιομορφία: σου δίνεται με τη σύσταση να μη το διαβάσεις· τουλάχιστο με την έννοια που διαβάζεις ένα άλλο βιβλίο για να κατανοήσεις το περιεχόμενό του.

Πράγματι, οι ασκήσεις που σου δίνει ο καθηγητής σου είναι για να εργαστείς μόνος. Γιατί το να λύσεις μια άσκηση σημαίνει πολλές φορές όχι μόνο ότι έχεις κατανοήσει την αντίστοιχη θεωρητική ύλη αλλά και ότι ξέρεις να τη χρησιμοποιήσεις για να δημιουργείς, να ανακαλύπτεις ή να επιβεβαιώνεις κάτι καινούργιο. Και αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για σένα τον ίδιο. Δεν μπορεί παρά να έχεις και συ τη φιλοδοξία να λύνεις μόνος χωρίς βοήθεια τις ασκήσεις, για να νιώθεις τη χαρά αυτής της δημιουργίας, της ανακάλυψης.

Πρέπει να ξέρεις ότι όταν δυσκολεύεσαι στη λύση μιας άσκησης, τις πιο πολλές φορές υπάρχει κάποιο κενό στη γνώση της αντίστοιχης θεωρίας. Πήγαινε πίσω λοιπόν στο διδακτικό βιβλίο κάθε φορά που χρειάζεται να εντοπίσεις και να συμπληρώσεις τέτοια κενά. Οπωσδήποτε πριν καταπιαστείς με τη λύση των ασκήσεων πρέπει να αισθάνεσαι κάτοχος της θεωρίας που διδάχτηκες.

Εκτός από την κατανόηση της θεωρίας μπορεί να βοηθηθείς στη λύση μιας άσκησης από τα παραδείγματα και τις εφαρμογές που περιέχει το διδακτικό σου βιβλίο. Αν παρόλ' αυτά δε μπορείς να προχωρήσεις, στο τέλος του βιβλίου σου θα βρεις μια σύντομη υπόδειξη που ασφαλώς θα σε διευκολύνει.

Στις ελάχιστες περιπτώσεις που έχοντας εξαντλήσει κάθε περιθώριο προσπάθειας δε βρίσκεται η πορεία που οδηγεί στη λύση της άσκησης τότε και μόνο τότε μπορείς να καταφύγεις σ' αυτό το τεύχος και μάλιστα για να διαβάσεις εκείνο το τμήμα της λύσης που σου είναι απαραίτητο για να συνεχίσεις μόνος.

Ουσιαστικά λοιπόν δεν το 'χεις ανάγκη αυτό το τεύχος. Σου παρέχεται όμως για τους εξής λόγους:

α) Για να μπορείς να συγκρίνεις τις λύσεις που εσύ βρήκες.

β) Για να σε προφυλάξει από ανεύθυνα «λυσάρια».

γ) Για να απαλλάξει τους γονείς σου από αντίστοιχη οικονομική επιβάρυνση.

δ) Για να έχεις εσύ και οι συμμαθητές σου την ίδια συλλογή ασκήσεων που είναι έτσι επιλεγμένες ώστε να εξασφαλίζουν την εμπέδωση της ύλης.

ε) Για να εργάζεσαι χωρίς το άγχος να εξασφαλίσεις οπωσδήποτε για κάθε μάθημα τις λύσεις των ασκήσεων.

Το τεύχος που κρατάς είναι λοιπόν φίλος. Να του συμπεριφέρεσαι όπως σ' έναν φίλο που έχει δει πριν από σένα την ταινία που πρόκειται να δεις μη του επιτρέψεις να σου αποκαλύψει την «υπόθεση» πριν δεις και συ το έργο. Μετά μπορείτε, να συζητήσετε. Η σύγκριση των συμπερασμάτων θα είναι ενδιαφέρουσα και προπαντός επωφελής.

(Από το Τμήμα Μ.Ε. του Π.Ι.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = \mathbf{-2}$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = \mathbf{2}$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = \mathbf{2}$.

2. $\varphi(0) = \mathbf{6}$

$\varphi(1) = 1 - 5 + 6 = \mathbf{2}$.

Έχουμε διαδοχικά: $\varphi(t) = 0$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$t = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$\boldsymbol{t = 2}$ ή $\boldsymbol{t = 3}$.

3. $h(0) = \text{συν}0 - \text{ημ}0 = 1 - 0 = \mathbf{1}$

$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \text{συν}\dfrac{\pi}{2} - \text{ημ}\dfrac{\pi}{2} = 0 - 1 = \mathbf{-1}$.

Έχουμε διαδοχικά: $h(\theta) = 0$

$\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta = 0$

$\text{ημ}\theta = \text{συν}\theta$

$\text{εφ}\theta = 1$

$\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ ή $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \boldsymbol{\dfrac{5\pi}{4}}$.

4. $f(1) = \dfrac{1}{2}\ln 1^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 0 = \mathbf{0}$

$f(e) = \dfrac{1}{2}\ln e^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln e = \mathbf{1}$.

5. Πρέπει $(x-1)(x-2) \neq 0$ ή ισοδύναμα $x \neq 1$ και $x \neq 2$.

Άρα $\boldsymbol{A = \mathbf{R} - \{1, 2\}}$.

6. • Έχουμε διαδοχικά

$$f(x) < 0$$
$$(x-3)(x-7) < 0$$
$$\mathbf{3 < x < 7}.$$

• Πρέπει $(x-3)(x-7) \geq 0$, οπότε $x \leq 3$ ή $x \geq 7$.

Άρα $\boldsymbol{A = (-\infty, 3] \cup [7, +\infty)}$.

7.

$$f(x) + g(x) = 3x^2 - 2x - 1 + 2x - 1 = \mathbf{3x^2 - 2}$$

$$f(x) \cdot g(x) = (3x^2 - 2x - 1)(2x - 1)$$
$$= 6x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 2x - 2x + 1 = \mathbf{6x^3 - 7x^2 + 1}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathbf{3x^2 - 2x - 1}}{\mathbf{2x - 1}}, \quad \boldsymbol{x \neq \frac{1}{2}}.$$

8. Έχουμε

i) $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 - 3x + 4) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 4 = \mathbf{4}$

ii) $\lim\limits_{x \to -2}[(2x-1)(x+4)] = (-4-1)(-2+4) = -5 \cdot 2 = \mathbf{-10}$

iii) $\lim\limits_{x \to 4}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{4} + \frac{1}{\sqrt{4}} = 2 + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{5}{2}}$

iv) $\lim\limits_{x \to 0}(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) = 2 \cdot \eta\mu 0 + 3 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = \mathbf{3}$

v) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}}(3\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 3 \cdot \eta\mu\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$.

9. Έχουμε

i) $\lim\limits_{x \to -2}\frac{x^2 - 4}{3(x-2)} = \frac{(-2)^2 - 4}{3(-2-2)} = \frac{4-4}{-12} = \frac{0}{-12} = \mathbf{0}$

ii) $\lim\limits_{x \to -1}\frac{5x^2}{x^2 + 1} = \frac{5(-1)^2}{(-1)^2 + 1} = \frac{5}{1+1} = \mathbf{\frac{5}{2}}$

iii) $\lim\limits_{x \to 0}[(x+1)\sigma\upsilon\nu x] = (0+1) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = \mathbf{1}$

iv) Για $x \neq 4$ έχουμε $\dfrac{x^2-16}{x-4} = \dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4$ και επομένως

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 4+4 = \mathbf{8}.$$

v) Για $x \neq -5$ έχουμε $\dfrac{x^2-25}{x+5} = \dfrac{(x+5)(x-5)}{x+5} = x-5$ και επομένως

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5} = \lim_{x\to -5}(x-5) = -5-5 = \mathbf{-10}.$$

vi) Για $x \neq 2$ έχουμε $\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2} = \dfrac{(2x+1)(x-2)}{x-2} = 2x+1$ και επομένως

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}(2x+1) = 2\cdot 2+1 = 4+1 = \mathbf{5}.$$

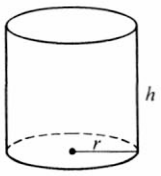
Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}} \\ &= \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} \\ &= \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \\ &= \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

2. Αφού οι τρεις πλευρές του ορθογώνιου που θα περιφραχτούν έχουν μήκος 100m και η μια πλευρά του είναι x, η άλλη πλευρά του θα είναι $\dfrac{100-x}{2} = 50-\dfrac{x}{2}$ και το εμβαδόν του θα είναι $E(x) = x\left(50-\dfrac{x}{2}\right)$ με $0 < x < 100$.

3. • Το μήκος της βάσης του κυλίνδρου είναι $2\pi r$ και σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε $2\pi r + h = 20$. (1)



Ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi r^2 \cdot h$. (2)

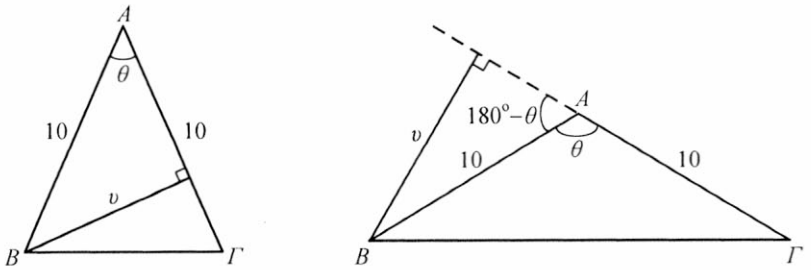
Από την (1) έχουμε $r = \dfrac{20-h}{2\pi}$, οπότε η (2) γίνεται

$V = \pi\left(\dfrac{20-h}{2\pi}\right)^2 \cdot h$, άρα $\boldsymbol{V(h) = \pi\left(\dfrac{20-h}{2\pi}\right)^2 \cdot h}$ **με** $\boldsymbol{0 < h < 20}$.

• Η επιφάνεια του ανοικτού κυλίνδρου είναι $E = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$. Όμως $h = 20 - 2\pi r$, οπότε $E(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot (20 - 2\pi r)$, με $r > 0$ και $20 - 2\pi r > 0$, δηλαδή $0 < r < \dfrac{10}{\pi}$.

Άρα $\boldsymbol{E(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot (20 - 2\pi r)}$, $\boldsymbol{0 < r < \dfrac{10}{\pi}}$.

4.



• Αν η γωνία θ είναι οξεία ή αμβλεία έχουμε $\eta\mu\theta = \dfrac{\upsilon}{10}$ ή $\eta\mu(180^\circ - \theta) = \dfrac{\upsilon}{10}$ αντιστοίχως, οπότε σε κάθε περίπτωση ισχύει $\eta\mu\theta = \dfrac{\upsilon}{10}$, άρα $\boldsymbol{\upsilon = 10 \cdot \eta\mu\theta}$. (1)

• Έχουμε $E(\theta) = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot \upsilon = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \eta\mu\theta$ ή $\boldsymbol{E(\theta) = 50\eta\mu\theta}$. (2)

Οι τύποι (1), (2) ισχύουν και στην περίπτωση που $\theta = 90^\circ$.

5. i) Για $x \neq 5$ έχουμε $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$, οπότε

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{5}}}.$$

ii) Για $h \neq 0$ έχουμε

$$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{(1+h)-1} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}.$$

1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) • $f(3+h)-f(3) = 3(3+h)+1-(3\cdot 3+1) = 9+3h+1-9-1 = 3h$

• Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{3h}{h} = 3$.

• Άρα $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3 = \mathbf{3}$.

ii) • $g(-2+h)-g(-2) = (-2+h)^2+5-[(-2)^2+5]$

$= 4+h^2-4h+5-4-5 = h(h-4)$.

• Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{g(-2+h)-g(-2)}{h} = \dfrac{h(h-4)}{h} = h-4$.

• Άρα $g'(-2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(-2+h)-g(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h-4) = \mathbf{-4}$.

iii) • $\sigma(4+h)-\sigma(4) = (4+h)^2+2(4+h)-(4^2+2\cdot 4)$

$= 16+8h+h^2+8+2h-16-8 = h^2+10h = h(h+10)$.

• Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{\sigma(4+h)-\sigma(4)}{h} = \dfrac{h(h+10)}{h} = h+10$.

• Άρα $\sigma'(4) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sigma(4+h)-\sigma(4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h+10) = \mathbf{10}$.

2. • $f(1+h)-f(1) = \dfrac{1}{1+h+1}-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2+h}-\dfrac{1}{2} = -\dfrac{h}{2(2+h)}$.

• Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{1}{h}\cdot\left[-\dfrac{h}{2(2+h)}\right] = -\dfrac{1}{2(2+h)}$.

- Άρα $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left[-\dfrac{1}{2(2+h)}\right] = -\mathbf{\dfrac{1}{4}}$.

3. i) Έχουμε $L(r) = 2\pi r$

- $L(3+h) - L(3) = 2\pi(3+h) - 2\pi\cdot 3 = 6\pi + 2\pi h - 6\pi = 2\pi h$.
- Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{L(3+h)-L(3)}{h} = \dfrac{2\pi h}{h} = 2\pi$.
- Άρα $L'(3) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{L(3+h)-L(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2\pi = \mathbf{2\pi}$.

ii) Έχουμε $E(r) = \pi r^2$

- $E(2+h) - E(2) = \pi(2+h)^2 - \pi\cdot 2^2 = \pi(4+4h+h^2-4) = \pi(4+h)h$.
- Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{E(2+h)-E(2)}{h} = \dfrac{\pi(4+h)h}{h} = \pi(4+h)$.
- Άρα $E'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{E(2+h)-E(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\pi(4+h) = \mathbf{4\pi}$.

4. i) Έχουμε $E(x) = x^2$

- $E(5+h) - E(5) = (5+h)^2 - 5^2 = 25 + 10h + h^2 - 25 = h(10+h)$.
- Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{E(5+h)-E(5)}{h} = \dfrac{h(10+h)}{h} = 10+h$.
- Άρα $E'(5) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{E(5+h)-E(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(10+h) = \mathbf{10}$.

ii) Έχουμε $V(x) = x^3$

- $V(10+h) - V(10) = (10+h)^3 - 10^3$

$$= 10^3 + 3\cdot 10^2\cdot h + 3\cdot 10\cdot h^2 + h^3 - 10^3$$

$$= h(300 + 30h + h^2)$$

- Για $h \neq 0$ έχουμε

$$\frac{V(10+h)-V(10)}{h} = \frac{h(300+30h+h^2)}{h} = 300 + 30h + h^2.$$

- Άρα $V'(10) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{V(10+h)-V(10)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(300+30h+h^2) = \mathbf{300}$.

5. i) Πρέπει να υπολογίσουμε το $f'(3)$.

- $f(3+h)-f(3) = (3+h)^2 - 3^2 = 9+6h+h^2-9 = h(6+h)$
- Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{h(6+h)}{h} = 6+h$.
- Άρα $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6+h) = 6$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα έχει τη μορφή

$$y = 6x + \beta .$$

Η εφαπτομένη αυτή όμως θα διέρχεται και από το σημείο $A(3, f(3))$, δηλαδή από το $A(3, 9)$ και επομένως θα ισχύει $9 = 6\cdot 3 + \beta$, οπότε $\beta = -9$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\boldsymbol{y = 6x - 9}$.

ii) Πρέπει να υπολογίσουμε το $f'(4)$.

- $f(4+h)-f(4) = 2\sqrt{4+h} - 2\sqrt{4} = 2(\sqrt{4+h}-2)$.
- Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h} = \dfrac{2(\sqrt{4+h}-2)}{h} = 2\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{(4+h)-4}$

$$= 2\frac{\sqrt{4+h}-2}{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{2}{\sqrt{4+h}+2}$$

- Άρα $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{4+h}+2} = \dfrac{2}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα έχει τη μορφή

$$y = \frac{1}{2}x + \beta .$$

Η εφαπτομένη αυτή όμως θα διέρχεται και από το σημείο $A(4, f(4))$, δηλαδή από το $A(4,4)$ και επομένως θα ισχύει $4 = \dfrac{1}{2}\cdot 4 + \beta$, οπότε $\beta = 2$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + 2}$.

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $(-5)' = 0$ ii) $(x^4)' = 4x^3$ iii) $(x^9)' = 9x^8$.

2. i) $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ ii) $(x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$

iii) $(x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$.

3. i) $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

ii) $\left(\sqrt[5]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

4. i) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}$

ii) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

iii) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)' = \left(x^{-\frac{2}{5}}\right)' = -\frac{2}{5}x^{-\frac{2}{5}-1} = -\frac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}} = -\frac{2}{5}\frac{1}{x\sqrt[5]{x^2}}$.

5. i) $(4x^3)' = 4(x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$

ii) $(6x^{-5})' = 6 \cdot (x^{-5})' = 6 \cdot (-5)x^{-6} = -30x^{-6}$

iii) $\left(-\frac{2}{5}x^{20}\right)' = -\frac{2}{5} \cdot 20 \cdot x^{19} = -8x^{19}$.

6. i) $f(x) = \frac{-6}{\sqrt[4]{x}} = -6x^{-\frac{1}{4}}$ και επομένως

$$f'(x)=\left(-6x^{-\frac{1}{4}}\right)'=-6\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)'=-6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot x^{-\frac{1}{4}-1}=\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{4}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}.$$

ii) $f(x)=6x\sqrt{x}=6x\cdot x^{\frac{1}{2}}=6x^{\frac{3}{2}}$ και επομένως

$$f'(x)=\left(6x^{\frac{3}{2}}\right)'=6\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=9x^{\frac{1}{2}}=9\sqrt{x}.$$

7. i) $(x^4+3x^2)'=(x^4)'+(3x^2)'=4x^3+6x$

ii) $\left(x^2+5+\frac{3}{x}\right)'=(x^2)'+(5)'+\left(\frac{3}{x}\right)'=2x+0-\frac{3}{x^2}=2x-\frac{3}{x^2}$

iii) Έχουμε $\frac{x^2+2x-1}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}=x+2-\frac{1}{x}$ και επομένως

$$\left(\frac{x^2+2x-1}{x}\right)'=\left(x+2-\frac{1}{x}\right)'=1+0+\frac{1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}.$$

8. i) $(8x^3-\eta\mu x+5)'=(8x^3)'-(\eta\mu x)'+(5)'=24x^2-\sigma\upsilon\nu x$

ii) $[6\sigma\upsilon\nu x-8(x^2+x)]'=(6\sigma\upsilon\nu x)'-(8(x^2+x))'=-6\eta\mu x-8(2x+1)$

9. i)
$$\begin{aligned}\left((x^3+1)(x^4+1)\right)'&=(x^3+1)'(x^4+1)+(x^3+1)(x^4+1)'\\&=3x^2(x^4+1)+4x^3(x^3+1)\\&=3x^6+3x^2+4x^6+4x^3\\&=7x^6+4x^3+3x^2.\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}(\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x))'&=(\eta\mu x)'(1-\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)'\\&=\sigma\upsilon\nu x(1-\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x\cdot\eta\mu x\\&=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x\\&=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 2x.\end{aligned}$$

10. i)
$$\begin{aligned}(x\sigma\upsilon\nu x+3(x+1)(x-1))'&=(x\sigma\upsilon\nu x)'+(3(x+1)(x-1))'\\&=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x+3(x-1+x+1)\\&=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x+6x\end{aligned}$$

ii) $$(4x^2\eta\mu x - 3x^2\sigma\upsilon\nu x)' = (4x^2\eta\mu x)' - (3x^2\sigma\upsilon\nu x)'$$
$$= 4(2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x) - 3(2x\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x)$$
$$= 8x\eta\mu x + 4x^2\sigma\upsilon\nu x - 6x\sigma\upsilon\nu x + 3x^2\eta\mu x$$
$$= (8x + 3x^2)\eta\mu x + (4x^2 - 6x)\sigma\upsilon\nu x$$

11. i) $$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

ii) $$\left(\frac{x}{\eta\mu x}\right)' = \frac{(x)'\eta\mu x - x(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$$

iii) $$\left(\frac{x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(x+\eta\mu x)'(1+\sigma\upsilon\nu x) - (x+\eta\mu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)'}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$
$$= \frac{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x) - (x+\eta\mu x)(-\eta\mu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$
$$= \frac{1+2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + x\eta\mu x + \eta\mu^2 x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$
$$= \frac{2+2\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

12. i) $$\left(\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{-(1+\sigma\upsilon\nu x)'}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

ii) $$\left(\frac{3}{(x+1)^2}\right)' = \frac{-3((x+1)^2)'}{(x+1)^4} = \frac{-3\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-6}{(x+1)^3}$$

13. i) $$((x-1)^5)' = 5(x-1)^4(x-1)' = 5(x-1)^4$$

ii) $$((2x+1)^5)' = 5(2x+1)^4(2x+1)' = 10(2x+1)^4$$

iii) $$((2x^2-3x)^5)' = 5(2x^2-3x)^4(2x^2-3x)' = 5(2x^2-3x)^4(4x-3)$$

14. i) $$(\eta\mu^3 x)' = 3\cdot\eta\mu^2 x\cdot(\eta\mu x)' = 3\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu x$$

ii) $$(\eta\mu x^3)' = \sigma\upsilon\nu x^3\cdot(x^3)' = 3x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x^3$$

iii) $(x\eta\mu 4x)' = (x)' \cdot \eta\mu 4x + x(\eta\mu 4x)' = \eta\mu 4x + x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x \cdot (4x)'$

$= \eta\mu 4x + 4x\sigma\upsilon\nu 4x$

iv) $(\varepsilon\varphi 3x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 3x} \cdot (3x)' = \dfrac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 3x}$.

15. i) $(\sqrt{2x^2 - x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 - x}} \cdot (2x^2 - x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 - x}} \cdot (4x - 1)$

ii) $(\sqrt{1 + \eta\mu x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{1 + \eta\mu x}} \cdot (1 + \eta\mu x)' = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{1 + \eta\mu x}}$.

16. i) $(e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3e^{3x}$

ii) $(e^{-x^2}) = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2x \cdot e^{-x^2}$

iii) $(e^{\alpha x + \beta})' = e^{\alpha x + \beta} \cdot (\alpha x + \beta)' = \alpha \cdot e^{\alpha x + \beta}$

iv) $\left(\dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}\right)' = \dfrac{(e^x)'(e^x + e^{-x}) - e^x(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \dfrac{e^x(e^x + e^{-x}) - e^x(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{e^x \cdot 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$.

17. i) $(\ln 2x)' = \dfrac{1}{2x}(2x)' = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$

ii) Έχουμε $\ln\dfrac{1}{x^3} = \ln 1 - \ln x^3 = -3\ln x$ και επομένως

$$\left(\ln\frac{1}{x^3}\right)' = (-3\ln x)' = -\frac{3}{x}$$

iii) $(\ln(\alpha x + \beta))' = \dfrac{1}{\alpha x + \beta}(\alpha x + \beta)' = \dfrac{\alpha}{\alpha x + \beta}$

iv) $(\ln\sqrt{x-1})' = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot (\sqrt{x-1})' = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2(x-1)}$.

18. i) $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

ii) $(e^x \cdot \ln x)' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + e^x \cdot \dfrac{1}{x} = e^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$.

19. i) Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda = f'(3)$. Έχουμε:

$$f'(t) = \left(\frac{t^3}{t^2+1}\right)' = \frac{3t^2(t^2+1) - t^3 \cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{t^4+3t^2}{(t^2+1)^2} \quad \text{και επομένως}$$

$$\lambda = \frac{3^4 + 3\cdot 3^2}{(3^2+1)^2} = \frac{3^3(3+1)}{10^2} = \frac{4\cdot 27}{100} = \frac{27}{25} = \mathbf{1{,}08}.$$

ii) Έχουμε $f'(\theta) = \left(\dfrac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta}\right)' = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta) - \eta\mu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)}{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2}$

$$= \frac{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu^2\theta}{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2} = \frac{1}{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2},$$

επομένως

$$\lambda = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\left(\eta\mu\frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{4}{1+3+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{4-3} = \mathbf{2(2-\sqrt{3})}.$$

20. i) $B'(t) = \left(1 + \frac{1}{4}(t+2)^2\right)' = \frac{1}{4}\cdot 2(t+2) = \frac{1}{2}(t+2)$.

ii) Έχουμε:

$$B'(1) = \frac{1}{2}(1+2) = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

$$B'(2) = \frac{1}{2}(2+2) = \mathbf{2}$$

$$B'(8) = \frac{1}{2}(8+2) = \mathbf{5}.$$

21. Έχουμε $d(x) = AB = \sqrt{(x-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{x^2+9}$ και επομένως

$$d'(x) = (\sqrt{x^2+9})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}(x^2+9)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης όταν $x = 10$ είναι

$$d'(10) = \frac{10}{\sqrt{10^2+9}} = \mathbf{\frac{10}{\sqrt{109}}}.$$

22. Επειδή η εφαπτομένη της καμπύλης της f θα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60° θα ισχύει $f'(0) = \varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$.

Έχουμε $f'(x) = (\alpha x(1-x))' = (\alpha x - \alpha x^2)' = \alpha - 2\alpha x$ και επομένως $f'(0) = \alpha$.

Άρα $\boldsymbol{\alpha = \sqrt{3}}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αφού η εφαπτομένη της καμπύλης της f θα είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 3x + 5$, θα πρέπει ο συντελεστής της εφαπτομένης να είναι ίσος με 3.

Έχουμε $f'(x) = \left(\dfrac{3x}{x+1}\right)' = \dfrac{3(x+1) - 3x}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$. Επομένως πρέπει

$$\frac{3}{(x+1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x+1 = 1 \quad \text{ή} \quad x+1 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -2.$$

Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 0$ και για $x = -2$ έχουμε $f(-2) = 6$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα **(0, 0)** και **(–2, 6)**.

2. Τα ζητούμενα σημεία $(x, f(x))$ είναι εκείνα για τα οποία ισχύει $f'(x) = 0$.

Έχουμε $f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x + 4)' = 3x^2 - 12x + 9$. Επομένως

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix}. \end{aligned}$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 8$ και για $x = 3$ είναι $f(3) = 27 - 54 + 27 + 4 = 4$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα **(1, 8)** και **(3, 4)**.

3. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της διχοτόμου $y = x$ είναι ίσος με 1, τα ζητούμενα σημεία $(x, f(x))$ είναι εκείνα για τα οποία ισχύει $f'(x) = 1$.

Έχουμε $f'(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)' = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Επομένως

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 1 \quad \text{ή} \quad x+1 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -2. \end{aligned}$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$ και για $x = -2$ είναι $f(-2) = 2$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα **(0, 0)** και **(–2, 2)**.

4. • Η ταχύτητα του σώματος είναι

$$\upsilon(t) = x'(t) = (t^3 - 2t^2 + t)' = \mathbf{3t^2 - 4t + 1}.$$

• Το σώμα είναι ακίνητο όταν $x'(t) = 0$. Έχουμε

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4 \pm 2}{6} \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow 1/3 \end{array}.$$

Άρα το σώμα είναι (στιγμιαία) ακίνητο όταν $\boldsymbol{t = \frac{1}{3}}$ και όταν $\boldsymbol{t = 1}$.

• Η επιτάχυνση του σώματος είναι

$$\alpha(t) = \upsilon'(t) = (3t^2 - 4t + 1)' = 6t - 4.$$

Για $t = \frac{1}{3}$ είναι $\alpha\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = 2 - 4 = \mathbf{-2}$ και για $t = 1$ είναι $\alpha(1) = 6 \cdot 1 - 4 = \mathbf{2}$.

5. Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= (A\text{συν}\omega x + B\text{ημ}\omega x)' \\ &= (A\text{συν}\omega x)' + (B\text{ημ}\omega x)' \\ &= A(\text{συν}\omega x)' + B(\text{ημ}\omega x)' \\ &= A(-\text{ημ}\omega x) \cdot (\omega x)' + B(\text{συν}\omega x) \cdot (\omega x)' \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f'(x) &= -A\omega\text{ημ}\omega x + B\omega\text{συν}\omega x \\ f''(x) &= (-A\omega\text{ημ}\omega x + B\omega\text{συν}\omega x)' \\ &= (-A\omega\text{ημ}\omega x)' + (B\omega\text{συν}\omega x)' \\ &= -A\omega \cdot \text{συν}\omega x \cdot \omega + B\omega(-\text{ημ}\omega x) \cdot \omega \\ &= -A\omega^2\text{συν}\omega x - B\omega^2\text{ημ}\omega x \\ &= -\omega^2(A\text{συν}\omega x + B\text{ημ}\omega x). \end{aligned}$$

Επομένως $f''(x) = -\omega^2 f(x)$, άρα $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$.

6. Έχουμε $f'(x) = (\alpha e^{px} + \beta e^{-px})' = \alpha \cdot e^{px} \cdot p + \beta \cdot e^{-px} \cdot (-p)$,

δηλαδή $f'(x) = \alpha p e^{px} - \beta p e^{-px}$, οπότε

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\alpha p e^{px} - \beta p e^{-px})' = \alpha p \cdot e^{px} \cdot p - \beta p \cdot e^{-px} \cdot (-p) \\ &= \alpha p^2 e^{px} + \beta p^2 e^{-px} = p^2(\alpha e^{px} + \beta e^{-px}) = p^2 f(x). \end{aligned}$$

7. Έχουμε $f'(x) = (e^{\mu x})' = e^{\mu x} \cdot \mu = \mu e^{\mu x}$ και

$$f''(x) = (\mu e^{\mu x})' = \mu \cdot e^{\mu x} \cdot \mu = \mu^2 e^{\mu x}.$$

Επομένως έχουμε διαδοχικά

$$f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) = 0$$

$$\mu^2 \cdot e^{\mu x} - 3\mu e^{\mu x} - 4e^{\mu x} = 0 \qquad (e^{\mu x} \neq 0)$$

$$\mu^2 - 3\mu - 4 = 0$$

$$\mu = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \longrightarrow 4 \\ \longrightarrow -1 \end{array}.$$

Άρα $\boldsymbol{\mu = -1}$ ή $\boldsymbol{\mu = 4}$.

8. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ είναι $\lambda = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Έχουμε $f'(x) = (2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)' = (\eta\mu 2x)' = \sigma\upsilon\nu 2x \cdot 2 = 2\sigma\upsilon\nu 2x$.

Επομένως $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = -2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα έχει τη μορφή

$$y = -1 \cdot x + \beta.$$

Όμως το σημείο $\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$, δηλαδή το $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ανήκει στην εφαπτομένη.

Επομένως $\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3} + \beta$ που σημαίνει ότι $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\boldsymbol{y = -x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}}.$$

9. i) Έχουμε $P'(I) = \left(\frac{I}{\alpha + \beta I}\right)'$

$$= \frac{I' \cdot (\alpha + \beta I) - I \cdot (\alpha + \beta I)'}{(\alpha + \beta I)^2}$$

$$= \frac{\alpha + \beta I - \beta I}{(\alpha + \beta I)^2}.$$

Επομένως $P'(I) = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta I})^2}$ και $P'(0) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}$.

ii) Έχουμε

$$\frac{1}{\alpha}[1 - \beta P(I)]^2 = \frac{1}{\alpha}\left[1 - \beta \cdot \frac{I}{\alpha + \beta I}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha + \beta I - \beta I}{\alpha + \beta I}\right)^2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha + \beta I)^2} = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta I)^2} = P'(I).$$

10. i) Έχουμε $\upsilon(t) = y'(t) = (A\eta\mu\omega t)' = A \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \cdot \omega =$ $\boldsymbol{A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t}$

και $\alpha(t) = \upsilon'(t) = (A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t)' = A\omega \cdot (-\eta\mu\omega t) \cdot \omega =$ $\boldsymbol{-A\omega^2 \cdot \eta\mu\omega t}$.

ii) Έχουμε $\alpha(t) = -A\omega^2 \cdot \eta\mu\omega t = -\omega^2 \cdot A\eta\mu\omega t = -\omega^2 \cdot y$, δηλαδή $\alpha(t) = -\omega^2 \cdot y$ που δηλώνει ότι η επιτάχυνση α είναι ανάλογη της απομάκρυνσης y.

iii) Όταν $\alpha(t) = -A\omega^2 \cdot \eta\mu\omega t = 0$, τότε $\eta\mu\omega t = 0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\omega t = 1$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega t = -1$. Όμως το μέτρο της ταχύτητας $\upsilon(t) = A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t$ είναι ίσο με $|A\omega| \cdot |\sigma\upsilon\nu\omega t|$ και γίνεται μέγιστο όταν $\sigma\upsilon\nu\omega t = \pm 1$, δηλαδή όταν $\alpha(t) = 0$.

1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	φθίνουσα		αύξουσα

Άρα για $x = 1$ η συνάρτηση παρουσιάζει **ελάχιστο ίσο με** $\boldsymbol{f(1) = -1}$.

ii) $f'(x) = -6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	αύξουσα		φθίνουσα

Άρα για $x = 0$ η συνάρτηση παρουσιάζει **μέγιστο ίσο με** $\boldsymbol{f(0) = 6}$.

iii) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	φθίνουσα		αύξουσα

Άρα για $x = 1$ η συνάρτηση παρουσιάζει **ελάχιστο ίσο με $f(1) = 3$**.

2. i) $f'(x) = 3x^2 - 12x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x(x-4) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 4$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	+	
$f(x)$	αύξουσα	φθίνουσα	αύξουσα	

Άρα για $x = 0$ η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο ίσο με $f(0) = 5$** και για $x = 4$ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(4) = -27$**.

ii) $f'(x) = -3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -3(x+1)(x-1) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0 +	0	−
$f(x)$	φθίνουσα	αύξουσα		φθίνουσα

Άρα για $x = -1$ η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(-1) = -1$** και για $x = 1$ παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο ίσο με $f(1) = 3$**.

3. i) $f'(x) = 6x^2$. Παρατηρούμε ότι για $x = 0$ είναι $f'(0) = 0$, αλλά $f'(x) = 0$ για $x < 0$ και για $x > 0$. Επομένως (βλ. σχόλιο σελ. 40) η f είναι **γνησίως αύξουσα** και άρα δεν έχει ακρότατα.

ii) $f'(x) = -3x^2$. Παρατηρούμε ότι $f'(0) = 0$, αλλά $f'(x) < 0$ για $x < 0$ και για $x > 0$. Επομένως η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και άρα δεν έχει ακρότατα.

iii) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$. Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 0$, αλλά $f'(x) > 0$ για $x < 1$ και για $x > 1$. Επομένως η f είναι **γνησίως αύξουσα** και άρα δεν έχει ακρότατα.

iv) $f'(x) = -3x^2 + 6x - 5$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου αυτού είναι $\Delta = 36 - 4\cdot(-3)(-5) = -24 < 0$. Επομένως $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο **R** και δεν έχει ακρότατα.

4. Έστω x και y οι δυο αριθμοί με $x + y = 40$. Για το γινόμενό τους έχουμε $xy = x(40 - x) = 40x - x^2$. Ζητάμε το μέγιστο της συνάρτησης $E(x) = 40x - x^2$. Έχουμε $E'(x) = 40 - 2x$. Επομένως $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20$ και $E'(x) > 0 \Leftrightarrow 40 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 40 \Leftrightarrow x < 20$.

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $x = 20$. Όταν όμως $x = 20$, τότε και $y = 20$. Δηλαδή το γινόμενο γίνεται μέγιστο όταν $x = y = 20$, και είναι ίσο με $20 \cdot 20 = \mathbf{400}$.

x	$-\infty$ 20	$+\infty$
$E'(x)$	+	−
$E(x)$	αύξουσα	φθίνουσα

5. Έστω x και y οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Τότε $xy = 100$ με $x > 0$ και $y > 0$. Η περίμετρος του ορθογωνίου αυτού είναι $2x + 2y = 2x + 2\cdot\frac{100}{x}$.

Ζητάμε το ελάχιστο της συνάρτησης $L(x) = 2x + \frac{200}{x}$, $x > 0$. Έχουμε $L'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}$. Επομένως $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ και

$L'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{200}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 > 200 \Leftrightarrow x^2 > 100 \Leftrightarrow x > 10$, αφού $x > 0$.

Άρα για $x = 10$ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο. Όταν όμως $x = 10$, τότε και $y = \frac{100}{10} = 10$. Δηλαδή το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι αυτό που έχει ίσες διαστάσεις $\boldsymbol{x = y = 10\,\mathbf{m}}$.

x	0 10	$+\infty$
$L'(x)$	−	+
$L(x)$	φθίνουσα	αύξουσα

6. Έστω x η πλευρά της βάσης και y το ύψος του. Έχουμε $x^2 y = 32$. Ελάχιστο υλικό κατασκευής χρειάζεται εκείνο το κουτί που έχει την ελάχιστη επιφάνεια. Η επιφάνεια του κουτιού είναι ίση με

$$x^2 + 4xy = x^2 + 4x\cdot\frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}.$$

Ζητάμε επομένως το ελάχιστο της συνάρτησης $E(x) = x^2 + \frac{128}{x}$, $x > 0$.

Έχουμε $E'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}$. Επομένως $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$,

ενώ $E'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{128}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 2x^3 > 128 \Leftrightarrow x^3 > 64 \Leftrightarrow x > 4$.

Άρα για $x = 4$ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο. Όταν όμως $x = 4$, τότε $y = \frac{32}{4^2} = 2$. Δηλαδή το κουτί που χρειάζεται το ελάχιστο δυνατό υλικό είναι εκείνο που έχει **πλευρά βάσης 4dm και ύψος 2 dm**.

x	0	4	$+\infty$
$E'(x)$	$-$	0	$+$
$E(x)$	φθίνουσα		αύξουσα

7. Έστω x η πλευρά της βάσης του και y το ύψος του. Τότε έχουμε $x^2 + 4xy = 12$. Ο όγκος του κουτιού είναι $x^2 \cdot y = x^2 \cdot \frac{12 - x^2}{4x} = \frac{1}{4}x(12 - x^2)$.

Ζητάμε επομένως το μέγιστο της συνάρτησης

$$V(x) = \frac{1}{4}x(12 - x^2) = 3x - \frac{1}{4}x^3 \quad x > 0.$$

Έχουμε $V'(x) = 3 - \frac{3}{4}x^2$. Επομένως $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ αφού $x > 0$,

ενώ $V'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{3}{4}x^2 > 0 \Leftrightarrow 12 - 3x^2 > 0 \Leftrightarrow 4 > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Άρα ο μέγιστος δυνατός όγκος του κουτιού είναι ίσος με

$V(2) = 6 - \frac{1}{4} \cdot 8 = 6 - 2 = \mathbf{4\,dm^3}$.

x	0	2	$+\infty$
$V'(x)$	$+$	0	$-$
$V(x)$	αύξουσα		φθίνουσα

8. Έστω $M(x, 2x-3)$ ένα σημείο της ευθείας. Τότε η απόσταση του M από την αρχή $O(0, 0)$ είναι $\sqrt{x^2 + (2x-3)^2}$. Ζητάμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής. Αρκεί να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^2 + (2x-3)^2$. Έχουμε $f'(x) = 2x + 2(2x-3) \cdot 2 = 10x - 12$.

Επομένως $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$, ενώ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{6}{5}$.

Δηλαδή η συναρτηση έχει ελάχιστη τιμή για $x = \frac{6}{5}$, και άρα το πλησιέστερο σημείο της ευθείας στην αρχή των αξόνων είναι το $\boldsymbol{M\left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right)}$.

x	$-\infty$	$\frac{6}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	φθίνουσα		αύξουσα

9. Έχουμε την ελάχιστη ταχύτητα όταν η ποσότητα $\frac{\lambda}{c}+\frac{c}{\lambda}$ είναι ελάχιστη. Αρκεί επομένως να βρούμε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(\lambda)=\frac{\lambda}{c}+\frac{c}{\lambda},\ \lambda>0$.

Έχουμε

$$f'(\lambda)=\frac{1}{c}-\frac{c}{\lambda^2} \quad \text{και} \quad f''(\lambda)=\frac{2c}{\lambda^3}.$$

Επίσης

$f'(\lambda)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{c}-\frac{c}{\lambda^2}=0 \Leftrightarrow \lambda^2=c^2 \Leftrightarrow \lambda=c$, αφού $c>0$ και $f''(c)=\frac{2c}{c^3}=\frac{2}{c^2}>0$.

Άρα για $\lambda=c$ η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο που σημαίνει ότι για $\boldsymbol{\lambda=c}$ η ταχύτητα υ είναι ελάχιστη.

10. Αν x είναι ο ένας αριθμός, τότε ο άλλος θα είναι $10-x$ και το άθροισμα των τετραγώνων τους θα είναι

$$x^2+(10-x)^2.$$

Ζητάμε λοιπόν το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x)=x^2+(10-x)^2,\quad 0<x<10.$$

Έχουμε $\qquad f'(x)=2x+2(10-x)(-1)=2x-20+2x.$

Επομένως $\qquad f'(x)=4x-20 \quad$ και $\quad f''(x)=4>0.$

Έχουμε $\qquad f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-20=0 \Leftrightarrow x=5.$

Άρα για $x=5$ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο. Όταν όμως $x=5$, τότε ο άλλος αριθμός είναι $10-x=5$. Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι ίσοι και **καθένας είναι ίσος με 5**.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Επειδή p και q σταθερές, το υ είναι συνάρτηση του r, δηλαδή

$$\upsilon(r)=100p(1+\ln r)-100qr,\quad r>0.$$

Έχουμε $\qquad \upsilon'(r)=100p\cdot\frac{1}{r}-100q$

$$\upsilon'(r)=0 \Leftrightarrow 100p\cdot\frac{1}{r}-100q=0 \Leftrightarrow r=\frac{p}{q}.$$

Επίσης ισχύει $\upsilon''(r)=-100p\frac{1}{r^2}<0$, για κάθε $r>0$, αφού $p>0$.

Άρα, όταν $\boldsymbol{r=\frac{p}{q}}$ το υ έχει τη μέγιστη τιμή του.

2. Έχουμε $\upsilon(x) = \kappa x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \kappa x^2(\ln 1 - \ln x) = -\kappa x^2 \ln x, \quad x > 0$.

Επομένως $\upsilon'(x) = (-\kappa x^2 \ln x)' = -\kappa\left(2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = -\kappa(2x \ln x + x)$

και $\upsilon'(x) = 0 \Leftrightarrow -\kappa(2x \ln x + x) = 0 \Leftrightarrow 2x \ln x + x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Όμως $\upsilon''(x) = -\kappa(2x \ln x + x)' = -\kappa\left(2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1\right) = -\kappa(2 \ln x + 3)$,

οπότε $\upsilon''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\kappa(-1+3) = -2\kappa < 0$, αφού $\kappa > 0$.

Άρα για $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ το υ γίνεται μέγιστο.

3. Αν x είναι το μήκος της πλευράς των τετραγώνων που θα αποκοπούν, τότε ο όγκος $V(x)$ του δοχείου θα είναι

$$V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x, \quad 0 < x < 30.$$

Έχουμε $V'(x) = 2(60-2x)(-2) \cdot x + (60-2x)^2 = (60-2x)(-4x + 60 - 2x)$,

δηλαδή $\boldsymbol{V'(x) = (60 - 2x)(60 - 6x)}$

και $V''(x) = -2(60 - 6x) + (60 - 2x)(-6)$

$= -120 + 12x - 360 + 12x$,

δηλαδή $\boldsymbol{V''(x) = 24x - 480}$.

Έχουμε $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ ή $x = 30$. Η τιμή $x = 30$ απορρίπτεται, αφού δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για $x = 10$ έχουμε $V''(10) = 240 - 480 = -240 < 0$. Άρα το δοχείο με το μεγαλύτερο όγκο είναι εκείνο για το οποίο $x = 10$, οπότε η πλευρά της βάσης του δοχείου είναι $60 - 2 \cdot 10 = \mathbf{40\,cm}$ και το ύψος $\mathbf{10\,cm}$.

4. **Αν x το πλάτος και y το μήκος του ορθογωνίου, τότε το ζητούμενο κόστος είναι $K = (2x + 2y) \cdot 9 + 6x$. Όμως $xy = 16000$, οπότε $y = \frac{16.000}{x}$ και το κόστος γίνεται**

$$K(x) = 6x + 18\left(x + \frac{16.000}{x}\right), \quad x > 0.$$

Έχουμε $K'(x) = 6 + 18\left(1 - \frac{16.000}{x^2}\right) = 6 + 18(1 - 16.000x^{-2})$

και $K''(x) = 18(32.000 \cdot x^{-3}) > 0$.

Είναι $K'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 + 18(1 - \frac{16.000}{x^2}) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + 3(1 - \frac{16.000}{x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{48.000}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{12.000}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 12.000$$

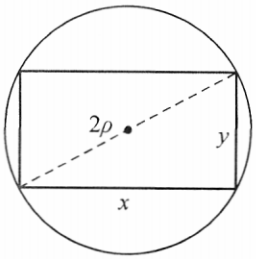
$$\Leftrightarrow x^2 = 400 \cdot 30$$

$$\Leftrightarrow x = 20\sqrt{30} \cong 109,5.$$

Επειδή $K''(x) > 0$, προκύπτει ότι για $x = 20\sqrt{30}$ έχουμε το ελάχιστο κόστος. Δηλαδή οι διαστάσεις του ορθογωνίου με το ελάχιστο κόστος περίφραξης και χωρίσματος είναι

$$x = 20\sqrt{30} \cong 109,5 \quad \text{και} \quad y = \frac{16.000}{109,5} \cong 146\text{m}.$$

5. Αν x και y είναι οι πλευρές του ορθογωνίου, τότε το εμβαδόν του είναι $E = x \cdot y$. Όμως από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $x^2 + y^2 = 4\rho^2$, οπότε $y = \sqrt{4\rho^2 - x^2}$. Επομένως το εμβαδόν του ορθογωνίου εκφράζεται ως συνάρτηση του x με τον τύπο:



$$E(x) = x\sqrt{4\rho^2 - x^2}, \quad 0 < x < 2\rho.$$

Έχουμε $E'(x) = (x \cdot \sqrt{4\rho^2 - x^2})' = \sqrt{4\rho^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4\rho^2 - x^2}}(-2x)$

$$= \sqrt{4\rho^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4\rho^2 - x^2}} = \frac{4\rho^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4\rho^2 - x^2}}.$$

Επομένως $$E'(x) = \frac{4\rho^2 - 2x^2}{\sqrt{4\rho^2 - x^2}}.$$

Έχουμε: $E'(x)=0 \Leftrightarrow 4\rho^2-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2=2\rho^2 \Leftrightarrow x=\rho\sqrt{2}$ (αφού $x>0$).

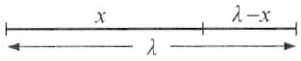
$E'(x)>0 \Leftrightarrow 4\rho^2-2x^2>0 \Leftrightarrow x^2<2\rho^2 \Leftrightarrow x<\rho\sqrt{2}$ (αφού $x>0$).

x	0		$\rho\sqrt{2}$		2ρ
$E'(x)$		$+$	0	$-$	

Επομένως για $x=\rho\sqrt{2}$ το οθρογώνιο έχει το μέγιστο εμβαδόν. Όταν όμως $x=\rho\sqrt{2}$, τότε και $y=\sqrt{4\rho^2-2\rho^2}=\rho\sqrt{2}$.

Άρα, από όλα τα ορθογώνια που μπορούν να εγγραφούν σε έναν κύκλο ακτίνας ρ, **το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν**.

6. Αν x είναι το μήκος του κύκλου, τότε $\lambda-x$ είναι η περίμετρος του τετραγώνου.



Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με μήκος x, τότε $2\pi\rho=x$, οπότε $\rho=\dfrac{x}{2\pi}$ και το εμβαδό του θα είναι $\pi\rho^2=\pi\dfrac{x^2}{4\pi^2}=\dfrac{x^2}{4\pi}$.

Επειδή το τετράγωνο θα έχει περίμετρο $\lambda-x$, η πλευρά του θα είναι $\alpha=\dfrac{\lambda-x}{4}$ και το εμβαδόν του $\left(\dfrac{\lambda-x}{4}\right)^2$. Επομένως το άθροισμα των δύο εμβαδών είναι

$$E(x)=\frac{x^2}{4\pi}+\left(\frac{\lambda-x}{4}\right)^2,\quad 0\le x\le\lambda.$$

Έχουμε $\quad E'(x)=\dfrac{1}{4\pi}\cdot 2x+2\left(\dfrac{\lambda-x}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right),\quad$ δηλαδή

$$E'(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot x-\frac{\lambda-x}{8}\quad\text{και}\quad E''(x)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}>0.$$

Έχουμε $\quad E'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}\cdot x-\dfrac{\lambda-x}{8}=0 \Leftrightarrow 4x-\pi(\lambda-x)=0$

$$\Leftrightarrow 4x-\lambda\pi+\pi x=0 \Leftrightarrow (4+\pi)x=\lambda\pi \Leftrightarrow x=\frac{\lambda\pi}{4+\pi}.$$

Επομένως όταν $x=\dfrac{\lambda\pi}{4+\pi}$ έχουμε το ελάχιστο εμβαδόν. Όταν όμως $x=\dfrac{\lambda\pi}{4+\pi}$, τότε η διάμετρος του κύκλου είναι $\delta=2\rho=\dfrac{2}{2\pi}\cdot\dfrac{\lambda\pi}{4+\pi}=\dfrac{\lambda}{4+\pi}$ και η πλευρά του τετραγώνου είναι επίσης

$$\alpha = \frac{\lambda - x}{4} = \frac{1}{4}\left(\lambda - \frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4\lambda + \lambda\pi - \lambda\pi}{4+\pi} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{4}+\boldsymbol{\pi}}.$$

7. Έχουμε $y'(t) = \dfrac{A}{\kappa_2 - \kappa_1}\left(-\kappa_1 e^{-\kappa_1 t} + \kappa_2 e^{-\kappa_2 t}\right)$ και

$$y''(t) = \frac{A}{\kappa_2 - \kappa_1}\left(\kappa_1^2 e^{-\kappa_1 t} - \kappa_2^2 e^{-\kappa_2 t}\right).$$

Επομένως: $y'(t) = 0 \Leftrightarrow \kappa_2 e^{-\kappa_2 t} = \kappa_1 e^{-\kappa_1 t}$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = e^{(\kappa_2 - \kappa_1)t}$$

$$\Leftrightarrow (\kappa_2 - \kappa_1)t = \ln\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1}\cdot\ln\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right).$$

Για $t_0 = \dfrac{1}{\kappa_2 - \kappa_1}\cdot\ln\left(\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)$, ισχύει $\kappa_2 e^{-\kappa_2 t_0} = \kappa_1 e^{-\kappa_1 t_0}$, οπότε

$$y''(t_0) = \frac{A}{\kappa_2 - \kappa_1}\left(\kappa_1^2 e^{-\kappa_1 t_0} - \kappa_2 \cdot \kappa_1 e^{-\kappa_1 t_0}\right)$$

$$= \frac{A\kappa_1 e^{-\kappa_1 t_0}}{\kappa_2 - \kappa_1}(\kappa_1 - \kappa_2) = -A\kappa_1 e^{-\kappa_1 t_0} < 0.$$

Άρα για $\boldsymbol{t = \dfrac{1}{\kappa_2 - \kappa_1}\ln\left(\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)}$ το φάρμακο παρουσιάζει τη μεγαλύτερη συγκέντρωση στο αίμα του ασθενούς.

8. i) Για να διανύσει το όχημα την απόσταση των 1000 km με ταχύτητα υ km/h, χρειάζεται χρόνο $\dfrac{1000}{\upsilon}$ ώρες, και αφού σε κάθε ώρα καταναλώνει $6 + 0{,}001\upsilon^3$ λίτρα, χρειάζεται συνολικά $K(\upsilon) = (6 + 0{,}0001\cdot\upsilon^3)\cdot\dfrac{1000}{\upsilon}$ λίτρα καύσιμα.

ii)Έχουμε $K(\upsilon)=\dfrac{6000}{\upsilon}+0{,}1\cdot\upsilon^2$. Επομένως $K'(\upsilon)=0{,}2\upsilon-\dfrac{6000}{\upsilon^2}$ και $K''(\upsilon)=0{,}2+\dfrac{12000}{\upsilon^3}>0$. Είναι $K'(\upsilon)=0\Leftrightarrow\upsilon^3=30000\Leftrightarrow\boldsymbol{\upsilon=\sqrt[3]{30000}}$ ή $\upsilon\cong 31$. Άρα για $\upsilon\cong 31\text{km}$ έχουμε την οικονομικότερη κατανάλωση καυσίμων, η οποία είναι ίση με $K(31)\cong 300$ λίτρα.

Δεν είναι εφαρμόσιμη, διότι το όχημα θα χρειάζεται περίπου $\dfrac{1000}{31}\cong 32$ ώρες, δηλαδή πολύ μεγάλο χρόνο.

9. Έχουμε $R_1+R_2=450$. Για την ολική αντίσταση R των R_1 και R_2 όταν συνδεθούν εν παραλλήλω έχουμε

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R}\Leftrightarrow\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}=\frac{1}{R}\Leftrightarrow R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

Επομένως $R=\dfrac{R_1(450-R_1)}{450}=R_1-\dfrac{1}{450}R_1^2$. Ώστε η ολική αντίσταση ως συνάρτηση της R_1 είναι

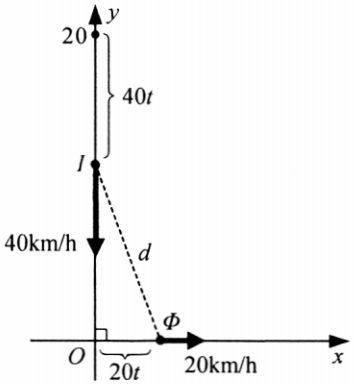
$$R(R_1)=R_1-\frac{1}{450}R_1^2.$$

Έχουμε $R'(R_1)=1-\dfrac{1}{225}R_1$ και $R''(R_1)=-\dfrac{1}{225}<0$.

Έχουμε $R'(R_1)=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{225}R_1=0\Leftrightarrow R_1=225$.

Όταν όμως $R_1=225$, τότε και $R_2=450-225=225$. Άρα για να έχουμε τη μέγιστη ολική αντίσταση πρέπει οι δύο αντιστάσεις να είναι ίσες, δηλαδή πρέπει $\boldsymbol{R_1=R_2=225\,\Omega}$.

10. Αν I και Φ είναι οι θέσεις των δύο πλοίων ύστερα από t ώρες τότε $OI=20-40t$ και $O\Phi=20t$, οπότε $I\Phi=\sqrt{(20-40t)^2+(20t)^2}$. Η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $(20-40t)^2+(20t)^2$ γίνει ελάχιστο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=(20-40t)^2+(20t)^2$, $t>0$.



Έχουμε $$f'(t) = 2(20-40t)(-40) + 2\cdot 20t\cdot 20$$
$$= -1600 + 3200t + 800t\,,$$

δηλαδή $$f'(t) = 4000t - 1600 \quad \text{και} \quad f''(t) = 4000 > 0\,.$$

Έχουμε $$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4000t - 1600 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1600}{4000} = \frac{2}{5} = 0{,}4\,.$$

Επομένως σε χρόνο $t = \frac{2}{5}$h (24 λεπτά) η απόσταση των δύο πλοίων θα είναι ελάχιστη και ίση με

$$I\Phi = \sqrt{\left(20 - 40\cdot\frac{2}{5}\right)^2 + \left(20\cdot\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}\,.$$

Επειδή $\sqrt{80} < \sqrt{100} = 10$ συμπεραίνουμε ότι οι άνθρωποι των δύο πλοίων **θα έχουν κάποια στιγμή οπτική επαφή**.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. i) Έχουμε: μέση πυκνότητα $= \dfrac{f(1{,}21) - f(1)}{1{,}21 - 1} = \dfrac{\sqrt{1{,}21} - \sqrt{1}}{0{,}21} = \dfrac{1{,}1 - 1}{0{,}21} = \dfrac{0{,}1}{0{,}21} \cong \mathbf{0{,}476}$

ii) Γραμμική πυκνότητα $\rho = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = f'(1)$.

Όμως $f'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Επομένως $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$. Άρα $\boldsymbol{\rho = 0{,}5}$.

2. Έχουμε $C'(x) = 3x^2 - 6\nu x$, $C''(x) = 6x - 6\nu$. Επομένως

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6\nu x = 0 \Leftrightarrow 3x = 6\nu \Leftrightarrow x = 2\nu \quad \text{και}$$
$$C''(2\nu) = 12\nu - 6\nu = 6\nu > 0\,.$$

Άρα για $x = 2\nu$ μονάδες το κόστος γίνεται ελάχιστο.
Το κέρδος από την παραγωγή 2ν μονάδων είναι ίσο με $P(\nu) = 2\nu\cdot(16-\nu)$, δηλαδή $P(\nu) = 32\nu - 2\nu^2$. Έχουμε $P'(\nu) = 32 - 4\nu$ και $P''(\nu) = -4 < 0$.

Είναι $P'(\nu) = 0 \Leftrightarrow 32 - 4\nu = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\nu = 8}$.

Άρα, όταν παράγονται ημερησίως $x = 2\cdot 8 = 16$ μονάδες από $\nu = 8$ εργάτες έχουμε το ελάχιστο κόστος και το μέγιστο κέρδος.

3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της καμπύλης της συνάρτησης f σε ένα σημείο της $(x,\ f(x))$ είναι

$$\lambda = f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 2x - 1)' = 3x^2 + 6x - 2$$

Αναζητούμε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση $\lambda(x) = 3x^2 + 6x - 2$ έχει ελάχιστο. Έχουμε

$$\lambda'(x) = 6x + 6 \text{ και } \lambda''(x) = 6 > 0 .$$

Επομένως

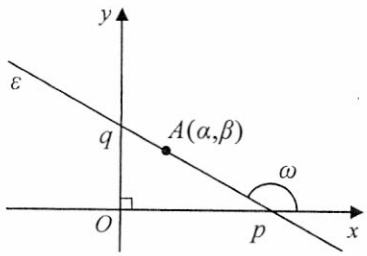
$$\lambda'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 .$$

Άρα για $x = -1$ η συνάρτηση έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης. Όμως για $x = -1$ είναι

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 1 = -1 + 3 + 2 - 1 = 3 .$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathbf{(-1,\ 3)}$.

4. Αν λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ε, τότε η εξίσωσή της είναι $y = \lambda x + \kappa$.



Επειδή το σημείο $A(\alpha,\ \beta)$ ανήκει στην ε έχουμε $\beta = \lambda \cdot \alpha + \kappa$, οπότε $\kappa = \beta - \lambda\alpha$. Επομένως η εξίσωση της ε γίνεται $y = \lambda x + \beta - \lambda\alpha$.

Για $x = 0$, έχουμε $y = \beta - \lambda\alpha$, δηλαδή $q = \beta - \lambda\alpha$ και για $y = 0$, έχουμε $0 = \lambda x + \beta - \lambda\alpha$, οπότε $x = \dfrac{\lambda\alpha - \beta}{\lambda}$ δηλαδή $p = \alpha - \dfrac{\beta}{\lambda}$. Επομένως

$$p + q = \alpha - \frac{\beta}{\lambda} + \beta - \lambda\alpha = (\alpha + \beta) - \left(\alpha\lambda + \frac{\beta}{\lambda}\right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(\lambda) = (\alpha + \beta) - \left(\alpha\lambda + \frac{\beta}{\lambda}\right)$$

και έχουμε

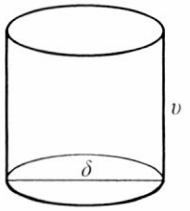
$$f'(\lambda) = -\left(\alpha - \frac{\beta}{\lambda^2}\right) = \frac{\beta}{\lambda^2} - \alpha \quad \text{και} \quad f''(\lambda) = -2\beta\frac{1}{\lambda^3} .$$

Είναι $f'(\lambda)=0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\lambda^2}-\alpha=0 \Leftrightarrow \lambda^2=\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε $\lambda=-\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$ αφού $\lambda<0$. Για $\lambda=\frac{-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$ έχουμε $f''(\lambda)=2\beta\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^3>0$. Επομένως για $\lambda=\frac{-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με

$$f\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right)=(\alpha+\beta)+\left(\alpha\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\beta\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)+(\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta})=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2.$$

5. Αν δ η διάμετρος και υ το ύψος του κυλίνδρου θα έχουμε



$$\delta+\upsilon=20 \quad \text{και}$$

$$V=\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\cdot\upsilon=\pi\cdot\frac{\delta^2}{4}\cdot(20-\delta)=5\pi\delta^2-\frac{\pi}{4}\delta^3.$$

Άρα $V(\delta)=5\pi\delta^2-\frac{\pi}{4}\delta^3$, $0<\delta<20$.

Έχουμε $V'(\delta)=10\pi\delta-\frac{3\pi}{4}\delta^2$ και $V''(\delta)=10\pi-\frac{3\pi}{2}\delta$.

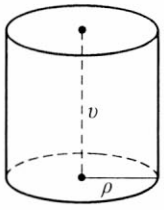
$$V'(\delta)=0 \Leftrightarrow 10\pi\delta-\frac{3\pi}{4}\delta^2=0 \Leftrightarrow 10\delta-\frac{3\delta^2}{4}=0 \Leftrightarrow 40\delta-3\delta^2=0$$

$$\Leftrightarrow (40-3\delta)\delta=0 \Leftrightarrow \delta=\frac{40}{3}.$$

Για $\delta=\frac{40}{3}$ είναι $V''\left(\frac{40}{3}\right)=10\pi-\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{40}{3}=-10\pi<0$.

Άρα για $\boldsymbol{\delta=\frac{40}{3}}$ και $\boldsymbol{\upsilon=20-\frac{40}{3}=\frac{20}{3}}$, έχουμε το μέγιστο όγκο του κυλίνδρου.

6. Το κόστος θα είναι ελάχιστο όταν η επιφάνεια του δοχείου θα είναι ελάχιστη. Αν ρ και υ είναι η ακτίνα και το ύψος του κυλινδρικού δοχείου σε cm, τότε η ολική του επιφάνεια είναι ίση με $E=2\pi\rho^2+2\pi\rho\cdot\upsilon$.



Όμως $V=\pi\rho^2\cdot\upsilon=1000$, οπότε $\upsilon=\frac{1000}{\pi\rho^2}$ και η επιφάνεια γίνεται $E(\rho)=2\pi\rho^2+2\pi\rho\cdot\frac{1000}{\pi\rho^2}$.

Θα βρούμε επομένως το ελάχιστο της συνάρτησης

$$E(\rho) = 2\pi\rho^2 + \frac{2000}{\rho}, \quad \rho > 0 .$$

Έχουμε

$$E'(\rho) = 4\pi\rho - \frac{2000}{\rho^2} \quad \text{και} \quad E''(\rho) = 4\pi + \frac{4000}{\rho^3} > 0 .$$

Επομένως

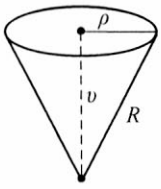
$$E'(\rho) = 0 \Leftrightarrow 4\pi\rho - \frac{2000}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow \pi\rho^3 = 500 \Leftrightarrow \rho^3 = \frac{500}{\pi},$$

οπότε $\rho = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$.

Άρα για $\rho = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ έχουμε την ελάχιστη επιφάνεια του δοχείου. Όταν $\rho = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, τότε $\upsilon = \frac{1000}{\pi\rho^2} = \frac{1000}{\pi\left(\frac{500}{\pi}\right)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2\rho$.

Άρα το κόστος ελαχιστοποιείται όταν η ακτίνα του δοχείου είναι $\rho = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \cong 5{,}42$ και το ύψος του διπλάσιο από την ακτίνα, δηλαδή ίσο με τη διάμετρο της βάσης.

7. Ο όγκος του κωνικού ποτηριού είναι $\frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot \upsilon$ όπου ρ είναι η ακτίνα της βάσης του και υ το ύψος του. Όμως $\upsilon^2 + \rho^2 = R^2$. Επομένως ο όγκος του ποτηριού είναι



$$V(\upsilon) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - \upsilon^2)\cdot\upsilon = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \upsilon - \frac{1}{3}\pi\upsilon^3, \quad \upsilon > 0 .$$

Έχουμε

$$V'(\upsilon) = \frac{1}{3}\pi R^2 - \pi\upsilon^2 \quad \text{και} \quad V''(\upsilon) = -2\pi\upsilon < 0 .$$

Είναι

$$V'(\upsilon) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi R^2 - \pi\upsilon^2 = 0 \Leftrightarrow \pi R^2 = 3\pi\upsilon^2$$

$$\Leftrightarrow 3\upsilon^2 = R^2 \Leftrightarrow \upsilon^2 = \frac{1}{3}R^2 \Leftrightarrow \upsilon = R\frac{\sqrt{3}}{3} .$$

Άρα για $\upsilon = R\frac{\sqrt{3}}{3}$ έχουμε τη μέγιστη χωρητικότητα που είναι ίση με

$$V\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \frac{1}{3}R^2\right)\frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2R^2}{3} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{3} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{27}R^3\sqrt{3}}.$$

8. α) Έχουμε $$c(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$$c'(x) = \frac{C'(x)\cdot x - C(x)}{x^2}.$$

Αφού όμως το μέσο κόστος είναι ελάχιστο θα έχουμε:

$$c'(x) = 0 \Leftrightarrow xC'(x) - C(x) = 0 \Leftrightarrow C'(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

β) i) Έχουμε $C(x) = \frac{1}{1000}x^2 + 2x + 2600$ και επομένως το μέσο κόστος είναι $\frac{C(x)}{x} = \frac{1}{1000}x + 2 + \frac{2600}{x}$ και το οριακό κόστος $C'(x) = \frac{1}{500}x + 2$. Έτσι έχουμε τον επόμενο πίνακα

Αριθμός μονάδων x	Κόστος $C(x)$	Μέσο κόστος $c(x) = \frac{C(x)}{x}$	Οριακό κόστος $C'(x)$
1000	5.600	5,6	4
2000	10.600	5,3	6
3000	17.600	5,87	8

ii) Πρέπει $c'(x) = \frac{C(x)}{x}$, δηλαδή $\frac{1}{500}x + 2 = \frac{1}{1000}x + 2 + \frac{2600}{x}$, οπότε $\frac{1}{1000}x = \frac{2600}{x}$ ή $x^2 = 2600 \cdot 1000$ και άρα $\boldsymbol{x \cong 1612}$.

Το ότι το επίπεδο αυτό παραγωγής δίνει πράγματι το ελάχιστο μέσο κόστος προκύπτει από το γεγονός ότι έχουμε

$$c'(x) = \frac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{500} + \frac{2}{x} - \frac{1}{1000} - \frac{2}{x} - \frac{2600}{x^2},$$

δηλαδή $$c'(x) = \frac{1}{100} - \frac{2600}{x^2} \quad \text{και άρα} \quad c''(x) = \frac{5200}{x^3} > 0.$$

Η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους για $x = 1612$ είναι

$$c(1612) = \frac{1}{1000} \cdot 1612 + 2 + \frac{2600}{1612} = 5{,}22.$$

9. α) Έχουμε $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P'(x) = R'(x) - C'(x).$$

Αν $P(x)$ μέγιστο, τότε $P'(x) = 0$ και επομένως $R'(x) - C'(x) = 0$.

Άρα $R'(x) = C'(x)$.

β) Πρέπει $R'(x) = C'(x)$

$$\left(x(50 - 0{,}01x)\right)' = (3800 + 5x - 0{,}001x^2)'$$

$$50 - 0{,}02x = 5 - 0{,}002x$$

$$45 = 0{,}018x$$

$$x = \frac{45}{0{,}018} = \mathbf{2500}.$$

Το ότι το επίπεδο αυτό παραγωγής δίνει πράγματι το μέγιστο κέρδος, προκύπτει από το γεγονός ότι έχουμε

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= xP(x) - C(x) \\ &= 50x - 0{,}01x^2 - 3800 - 5x + 0{,}001x^2 \\ &= 45x - 3800 - 0{,}009x^2, \end{aligned}$$ οπότε

$$P'(x) = 45 - 0{,}018x \quad \text{και} \quad P''(x) = -0{,}018 < 0.$$

10. i) Έχουμε $A\Gamma = \sqrt{d_1^2 + x^2}$, οπότε ο απαιτούμενος χρόνος στον αέρα είναι $\dfrac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{\upsilon_1}$. Επίσης $B\Gamma = \sqrt{d_2^2 + (d-x)^2}$, οπότε ο απαιτούμενος χρόνος στο νερό είναι $\dfrac{\sqrt{d_2^2 + (d-x)^2}}{\upsilon_2}$.

Επομένως ο χρόνος που χρειάζεται το φως για τη διαδρομή $A\Gamma B$ είναι

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}}{\upsilon_2}.$$

ii) Έχουμε $t'(x) = \dfrac{1}{\upsilon_1} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + d_1^2}} \cdot 2x + \dfrac{1}{\upsilon_2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{(d-x)^2 + d_2^2}} \cdot 2(d-x)(-1)$

$$= \frac{1}{\upsilon_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} - \frac{1}{\upsilon_2} \cdot \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + d_2^2}} .$$

iii) Το ελάχιστο του χρόνου το έχουμε όταν $t'(x) = 0$.

Επομένως, $$\frac{1}{\upsilon_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} = \frac{1}{\upsilon_2} \cdot \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + d_2^2}}$$

$$\frac{1}{\upsilon_1} \cdot \eta\mu\alpha = \frac{1}{\upsilon_2} \cdot \eta\mu\beta$$

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} .$$

2 *ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ*

Εισαγωγή

Ο όρος “Στατιστική” ενδεχομένως να προέρχεται από τη λατινική λέξη “status” (πολιτεία, κράτος) η οποία, χρησιμοποιήθηκε αρχικά για το χαρακτηρισμό αριθμητικών δεδομένων που αναφέρονται κυρίως στον πληθυσμό μιας χώρας. Μπορεί όμως να προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη στατίζω (τοποθετώ, ταξινομώ, συμπεραίνω). Με την εμφάνιση της Στατιστικής και στα πρώτα στάδια της ανάπτυξής της οι άνθρωποι την ταύτισαν με την παράθεση τεράστιων πινάκων με δεδομένα σχετικά με τους θανάτους, τις γεννήσεις, τους φόρους, τα προϊόντα, τους άνδρες σε στρατεύσιμη ηλικία κτλ., προσπαθώντας έτσι να περιγράψουν διάφορα δημογραφικά, οικονομικά και πολιτικά φαινόμενα. Η αρχαιότερη ίσως συλλογή στατιστικών στοιχείων θεωρείται η απογραφή πληθυσμού που έγινε το 2238 π.Χ. στην Κίνα από τον αυτοκράτορα Yao. Επίσης, στοιχειώδεις απογραφές φαίνεται να έχουν πραγματοποιηθεί από τους Σίνες, τους Αιγυπτίους και τους Πέρσες. Ο όρος Στατιστική αναφέρεται επίσης και από το Σωκράτη (Ξενοφώντος “Απομνημονεύματα”) και από τον Αριστοτέλη (“Πολιτεία”). Όπως γνωρίζουμε απογραφή πληθυσμού είχε επίσης διαταχθεί και από τον καίσαρα Αύγουστο στην περίοδο της γέννησης του Χριστού.

Στην αρχαιότητα, η συγκέντρωση στατιστικών στοιχείων είχε στόχο τον εντοπισμό των πολιτών που είχαν υποχρέωση να υπηρετήσουν ως πολεμιστές ή να πληρώσουν φόρο. Συστηματική συλλογή δεδομένων για τον πληθυσμό και την οικονομία άρχισε κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης στις πόλεις Βενετία και Φλωρεντία στην Ιταλία, και γρήγορα επεκτάθηκε και σε άλλες χώρες της Δυτικής Ευρώπης. Ο μεγάλος ρυθμός θνησιμότητας στην Ευρώπη οφειλόταν στις επιδημικές ασθένειες, στους πολέμους και στις λιμοκτονίες. Στις αρχικές καταγραφές των θανάτων από την πανώλη, τη φοβερή ασθένεια που εμφανίστηκε το 1348 και κράτησε πάνω από 400 χρόνια, προστέθηκαν στη συνέχεια και οι θάνατοι από άλλες αιτίες. Στα 1620 ο Άγγλος εμπορευόμενος Graunt από δειγματοληπτική έρευνα που έκανε σε οικογένειες του Λονδίνου βρήκε ότι σε κάθε 88 άτομα υπήρχαν 3 θάνατοι. Χρησιμοποιώντας τους καταλόγους του Λονδίνου, που έδιναν 13.200 θανάτους το 1620, εκτίμησε τον πληθυσμό του Λονδίνου το έτος αυτό στα 387.200 άτομα.

Μια πραγματικά σπουδαία στατιστική απογραφή στην εποχή του Γουλιέλμου του Κατακτητή, στο τέλος του 11ου αιώνα, αναφέρεται σε διάφορες μονάδες παραγωγής της Αγγλίας όπως μεταλλεία, ιχθυοτροφεία κ.ά. Από το 16ο έως το 19ο αιώνα, η ραγδαία ανάπτυξη του εμπορίου ώθησε τις πολιτειακές αρχές στη μελέτη οικονομικών δεδομένων, όπως είναι το εξαγωγικό εμπόριο, το πλήθος και η δυναμικότητα των βιομηχανιών κτλ.
Ενώ παλαιότερα η Στατιστική ασχολείτο μόνο με την παράθεση τεράστιων πινάκων με δεδομένα και αναρίθμητων διαγραμμάτων, σήμερα μπορούμε να διακρίνουμε σε μια στατιστική έρευνα τρία στάδια: Τη συλλογή του στατιστικού υλικού, την επεξεργασία και παρουσίασή του και τέλος την ανάλυση αυτού του υλικού και την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων. Τα τρία αυτά στάδια επιτυγχάνονται με την εφαρμογή καταλλήλων για κάθε περίπτωση στατιστικών μεθόδων, όπως και με τη βοήθεια των Υπολογιστών, οι οποίοι σημείωσαν τεράστια ανάπτυξη στις μέρες μας.
Συμπερασματικά λοιπόν μπορούμε να δώσουμε ως ορισμό της “Στατιστικής” το συνηθέστερο και πλέον γνωστό ορισμό του R.A. Fisher (1890-1962), πατέρα της σύγχρονης Στατιστικής:

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

- το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων
- τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους
- την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

Ο κλάδος της Στατιστικής που ασχολείται με τον πρώτο στόχο λέγεται **σχεδιασμός πειραμάτων** (experimental design) ενώ, με τον δεύτερο ασχολείται η **περιγραφική στατιστική** (descriptive statistics), που αποτελεί και το αντικείμενο μελέτης μας στη συνέχεια. Τέλος, η **επαγωγική στατιστική** ή **στατιστική συμπερασματολογία** (inferential statistics) περιλαμβάνει τις μεθόδους με τις οποίες γίνεται η προσέγγιση των χαρακτηριστικών ενός μεγάλου συνόλου δεδομένων, με τη μελέτη των χαρακτηριστικών ενός μικρού υποσυνόλου των δεδομένων. Έτσι αν, για παράδειγμα, ο Διευθυντής ενός σχολείου εξετάζοντας ένα δείγμα 100 απουσιών των μαθητών από το σύνολο των απουσιών ενός τριμήνου αναφέρει στο σύλλογο των καθηγητών ότι 20 από τις 100 απουσίες είναι αδικαιολόγητες, τότε απλώς **περιγράφει** αυτό που παρατήρησε. Αν όμως αναφέρει ότι το 20% των απουσιών είναι αδικαιολόγητες, τότε **συμπεραίνει** ότι το ποσοστό των απουσιών όλων των μαθητών του σχολείου είναι (περίπου) το ίδιο με αυτό του δείγματος. Προβαίνει δηλαδή σε μια **επαγωγή** από το δείγμα στον πληθυσμό.
Η Στατιστική σήμερα χρησιμοποιείται ευρύτατα σε όλους σχεδόν τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Βασικές έννοιες της Στατιστικής έχουν εισχωρήσει και ενσωματωθεί σε όλες τις επιστήμες. Από τις Ανθρωπιστικές, Νομικές και Κοινωνικές Επιστήμες (Αρχαιολογία, Λαογραφία, Κοινωνιολογία,

Δημογραφία, …), τις Φυσικές Επιστήμες (Φυσική, Χημεία, Αστρονομία, …), τις Επιστήμες Υγείας (Ιατρική, Φαρμακευτική, Βιολογία, …), τις Τεχνολογικές Επιστήμες (Μηχανολογία, Τοπογραφία, Ναυπηγική, …) μέχρι τις Επιστήμες Οικονομίας και Διοίκησης (Οικονομικά, Χρηματιστηριακά, Διαφήμηση, Marketing, …), βλέπουμε να υπεισέρχεται η Στατιστική είτε με την αρχική περιγραφική μορφή της είτε με τις προηγμένες αναλυτικές τεχνικές της.

Η ανάλυση στατιστικών ερευνών είναι το κυριότερο εργαλείο έρευνας σε ένα μεγάλο φάσμα εφαρμογών των παραπάνω επιστημών. Οι έρευνες των ανθρώπινων πληθυσμών (συχνά αναφερόμενες και ως **δημοσκοπήσεις**) αποτελούν σπουδαίες πηγές βασικής γνώσης των κοινωνικών επιστημών. Οικονομολόγοι, ψυχολόγοι, κοινωνιολόγοι και πολιτικοί επιστήμονες μελετούν ποικίλα θέματα όπως πρότυπα εσόδων-εξόδων των οικογενειών και των επιχειρήσεων, την επίδραση της επαγγελματικής απασχόλησης των γυναικών στην οικογενειακή ζωή, τις συγκοινωνιακές και ταξιδιωτικές συνήθειες των κατοίκων μιας πόλης, τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων για τους υποψηφίους και τις θέσεις τους. Πολλά προβλήματα που αντιμετωπίζουν σήμερα οι επιχειρήσεις αφορούν τη διατήρηση, αντικατάσταση ή το κρίσιμο σημείο αντοχής συσκευών ή προσωπικού. Ο διευθυντής μιας βιομηχανίας πρέπει να είναι σε θέση να κατανοεί στατιστικές έρευνες που αφορούν την ποιότητα του προϊόντος και την αποδοτικότητα της παραγωγικής διαδικασίας. Πρέπει επίσης να αντιλαμβάνεται την αποτελεσματικότητα της διαφήμισης και τις προτιμήσεις του καταναλωτή σε μια έρευνα αγοράς. Συμβουλευόμενος και τον στατιστικό μπορεί να πάρει σωστές αποφάσεις αναφορικά με την επέκταση ή μη της επιχείρησης. Σήμερα κάθε γιατρός πρέπει να έχει βασικές γνώσεις Στατιστικής που θα τον βοηθήσουν τόσο στην έρευνα όσο και στην καθημερινή άσκηση του κάθε μορφής και είδους ιατρικού ή βιοϊατρικού, γενικότερα, επαγγέλματος. Η Εθνική Στατιστική Υπηρεσία κάθε χώρας διενεργεί σε τακτά χρονικά διαστήματα δειγματοληπτικές έρευνες, για να πάρει πληροφορίες για τον πληθωρισμό, την απασχόληση και την ανεργία στη χώρα. Ανάλογα με τα αποτελέσματα διαμορφώνεται και η κυβερνητική πολιτική στα θέματα αυτά.

Πέρα από όλα αυτά, διαπιστώνουμε ολοένα και περισσότερο να γίνεται χρήση μεθόδων της Στατιστικής για την υποστήριξη διάφορων θέσεων. Ακόμα και σε τηλεοπτικές αντιπαραθέσεις (κυρίως σε προεκλογικές περιόδους) βλέπουμε τους συνομιλητές να κάνουν χρήση αριθμών, στατιστικών στοιχείων, γραφημάτων και διαγραμμάτων, για να δώσουν εγκυρότητα στις απόψεις τους και να πείσουν για τα λεγόμενά τους.

Παραπάνω έχουν αναφερθεί ελάχιστα από τα πεδία εφαρμογών της Στατιστικής. Προφανώς μια λεπτομερής περιγραφή όλων των εφαρμογών δεν είναι δυνατή. Η μελέτη όμως και η γνώση της Στατιστικής βοηθά όχι μόνο στη σωστή χρήση των γνωστών μεθόδων αλλά και στην ανάπτυξη νέων τεχνικών για την αποτελεσματικότερη εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Πληθυσμός - Μεταβλητές

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να εξετάσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, όταν ενδιαφερόμαστε για:

α) τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων εν όψει των προσεχών εκλογών
β) τον αριθμό των υπαλλήλων μιας επιχείρησης
γ) το ύψος, το βάρος, την ομάδα αίματος και το φύλο των μαθητών της Γ΄ τάξης Λυκείου
δ) τις συνέπειες του καπνίσματος στην υγεία των καπνιστών κτλ.

Σε καθένα από τα παραδείγματα αυτά έχουμε ένα σύνολο και θέλουμε να εξετάσουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. Ένα τέτοιο σύνολο λέγεται **πληθυσμός** (population). Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως μονάδες ή άτομα του πληθυσμού. Στο πρώτο παράδειγμα έχουμε το σύνολο των ψηφοφόρων και μας ενδιαφέρει η προτίμησή τους, ποιο "κόμμα" π.χ. υποστηρίζουν. Στο τρίτο παράδειγμα έχουμε το σύνολο των μαθητών της Γ΄ Λυκείου και μας ενδιαφέρουν τα τέσσερα χαρακτηριστικά τους: ύψος, βάρος, ομάδα αίματος και φύλο.
Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές** (variables) και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, B, \ldots$ Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**. Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους προκύπτει μια σειρά από δεδομένα, που λέγονται στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις. Τα στατιστικά δεδομένα δεν είναι κατ'ανάγκη διαφορετικά. Για παράδειγμα, αν εξετάζουμε την ομάδα αίματος δέκα ατόμων, τα στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις που θα προκύψουν μπορεί να είναι: Α, Α, Β, Α, ΑΒ, Ο, ΑΒ, ΑΒ, ΑΒ, Ο, Β. Οι δυνατές όμως τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή "ομάδα αίματος" είναι οι εξής τέσσερις: Α, Β, ΑΒ και Ο.
Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

1. Σε **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί. Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, η ομάδα αίματος (με τιμές *A*, *B*, *AB*, Ο), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι), οι συνέπειες του καπνίσματος (με τιμές καρδιακά νοσήματα, καρκίνος κτλ), όπως επίσης και η οικονομική κατάσταση και η υγεία των ανθρώπων (που μπορεί να χαρακτηριστεί ως κακή, μέτρια, καλή ή πολύ καλή), καθώς και το ενδιαφέρον των μαθητών για τη Στατιστική, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλό, μέτριο, χαμηλό ή μηδαμινό.

2. Σε **ποσοτικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:
   i) Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο "μεμονωμένες" τιμές. Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1,2,…), το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (με τιμές 1,2,…,6) κτλ.
   ii) Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν αποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β). Τέτοιες μεταβλητές είναι το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ΄ Λυκείου, ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν στα θέματα μιας εξέτασης, η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης κτλ.

Συλλογή Στατιστικών Δεδομένων

Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται **απογραφή** (census). Για παράδειγμα, η Στατιστική Υπηρεσία της χώρας μας (ΕΣΥΕ) κάνει κάθε 10 χρόνια απογραφή του πληθυσμού, η οποία αποτελεί κύρια πηγή δεδομένων δημογραφικού, οικονομικού, εμπορικού και βιομηχανικού χαρακτήρα. Η τελευταία απογραφή έγινε το 1991.

Σε πολλές όμως περιπτώσεις η εξέταση όλων των μονάδων του πληθυσμού είναι δύσκολη ή ακόμα και αδύνατη. Ένας υποψήφιος βουλευτής, για παράδειγμα, πριν από τις εκλογές είναι δύσκολο να εξετάσει όλους τους ψηφοφόρους, για να προσδιορίσει τι αντίληψη έχουν για τις θέσεις του. Επίσης ο κόπος, ο χρόνος και τα έξοδα που χρειάζονται για τη διεξαγωγή μιας απογραφής είναι πολλές φορές αρκετά μεγάλα, ιδίως όταν ο πληθυσμός που εξετάζεται είναι αρκετά μεγάλος. Εξάλλου ένας κατασκευαστής εκρηκτικών μηχανισμών ή ηλεκτρικών λυχνιών είναι αδύνατο να δοκιμάζει όλους τους παραγόμενους μηχανισμούς, για να ελέγχει την αποτελεσματικότητά τους, ή όλες τις παραγόμενες λυχνίες για να ελέγχει το χρόνο ζωής τους. Ομοίως ο γιατρός για να υπολογίσει την αποτελεσματικότητα ενός νέου φαρμάκου στην καταπολέμηση μιας ασθένειας είναι αδύνατο να περιμένει να δοκιμαστεί το φάρμακο σε όλα τα άτομα που πάσχουν από τη συγκεκριμένη ασθένεια. Όπου λοιπόν η απογραφή είναι δύσκολη, αδύνατη ή οικονομικά και χρονικά ασύμφορη, ο ερευνητής μαζεύει πληροφορίες από κάποια μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού, το οποίο καλείται **δείγμα**. Κάνει τις παρατηρήσεις

του στο δείγμα αυτό και μετά γενικεύει τα συμπεράσματά του για ολόκληρο τον πληθυσμό. Τα συμπεράσματα όμως που θα προκύψουν από τη μελέτη του δείγματος θα είναι αξιόπιστα, θα ισχύουν δηλαδή με ικανοποιητική ακρίβεια για ολόκληρο τον πληθυσμό, αν η επιλογή του δείγματος γίνει με σωστό τρόπο, ώστε το δείγμα να είναι, όπως λέμε, **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού. Στην πράξη, ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.

Η επιλογή του αντιπροσωπευτικού δείγματος είναι "εκ των ων ουκ άνευ". Αποτελεί πολύ σοβαρή και δύσκολη διαδικασία. Ο κακός σχεδιασμός και η εκτέλεση της στατιστικής έρευνας, η μη αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος, ο μη σωστός καθορισμός του μεγέθους του δείγματος αποτελούν μερικά βασικά μειονεκτήματα στη διαδικασία επιλογής ενός δείγματος. Από την άλλη πλευρά, στις απογραφές απαιτείται συνήθως μεγάλος αριθμός απογραφέων. Παρουσιάζεται έτσι η ανάγκη πρόσληψης και εκπαίδευσης μεγάλου αριθμού υπαλλήλων. Λόγω του μεγάλου χρόνου και κυρίως των σημαντικών εξόδων που απαιτούνται, πολλές φορές χρησιμοποιούνται ανεπαρκώς εκπαιδευμένοι απογραφείς με κίνδυνο να σημειώνονται λάθη οφειλόμενα σ'αυτούς. Για παράδειγμα, εκτιμάται ότι η επόμενη απογραφή του 2001 θα κοστίσει στον κρατικό προϋπολογισμό περίπου 20 δις δραχμές.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μία "προσεκτική" επιλογή μικρότερου δείγματος είναι δυνατόν να δώσει καλύτερα αποτελέσματα από ένα μεγαλύτερο δείγμα που δεν έχει εκλεγεί κατάλληλα. Ενδεικτικό είναι το παράδειγμα των προεδρικών εκλογών των ΗΠΑ το 1936. Το περιοδικό Literary Digest χρησιμοποιώντας δείγμα 2.400.000 ατόμων πρόβλεψε νίκη του Landon με ποσοστό 57%. Αντίθετα, το δημοσκοπικό γραφείο του G. Gallup χρησιμοποιώντας δείγμα 50.000 ατόμων πρόβλεψε το σωστό αποτέλεσμα που ήταν νίκη του Roosvelt με ποσοστό 62%! Η παταγώδης αποτυχία της δημοσκόπησης του περιοδικού οφειλόταν στο γεγονός ότι το δείγμα που επελέγη δεν ήταν αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού.

Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της **Δειγματοληψίας** (Sampling), που αποτελεί τη βάση της Στατιστικής. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι η οργάνωση της συλλογής και επεξεργασίας των σχετικών δεδομένων και πληροφοριών γίνεται κατά τρόπο που για δεδομένη ακρίβεια να επιτυγχάνεται το χαμηλότερο δυνατό κόστος ή, αντιστρόφως, να εξασφαλίζεται η μέγιστη δυνατή ακρίβεια την οποίαν επιτρέπουν τα μέσα που διαθέτουμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές; Από τις ποσοτικές ποιες είναι διακριτές και ποιες συνεχείς;

α) Βάρος
β) Αριθμός τροχαίων ατυχημάτων
γ) Φύλο
δ) Οικογενειακή κατάσταση
ε) Στάθμη της λίμνης του Μαραθώνα
στ) Τόπος καταγωγής
ζ) Επάγγελμα
η) Αριθμός παιδιών στην οικογένεια
θ) Βαθμολογία στο σκάκι
ι) Νούμερο γυναικείων παπουτσιών.

2. Στις παρακάτω περιπτώσεις ποιες μπορεί να είναι οι μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν; Να γίνει η διάκρισή τους σε ποιοτικές ή ποσοτικές και να αναφερθούν μερικές δυνατές τιμές τους:

α) Εξετάζουμε ένα δείγμα υπαλλήλων μιας εταιρείας
β) Εξετάζουμε ένα δείγμα προϊόντων από μια παραγωγή.
γ) Εξετάζουμε ένα δείγμα τηλεθεατών.
δ) Εξετάζουμε το χρόνο συμμετοχής και τον αριθμό πόντων που επιτυγχάνουν οι καλαθοσφαιριστές μιας ομάδας σε έναν αγώνα.

3. Για να βρούμε ποιες εκπομπές στην τηλεόραση έχουν τη μεγαλύτερη ακροαματικότητα αποφασίσαμε να πάρουμε δείγμα 500 τηλεθεατών. Ποιος είναι, κατά τη γνώμη σας, ο καλύτερος από τους παρακάτω τρόπους, για να πάρουμε το δείγμα; Είναι καλύτερο να πάρουμε:

α) μόνο άνδρες, β) μόνο γυναίκες, γ) άτομα από τις μεγάλες πόλεις
δ) άτομα μόνο από την επαρχία, ε) άτομα από διάφορες περιοχές.

4. Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα παρακάτω επιλεγόμενα δείγματα;

α) Για να βρούμε τα ποσοστά των ανδρών και των γυναικών στην Ελλάδα, πηγαίνουμε σε μια μεγάλη στρατιωτική μονάδα και ρωτάμε όλους τους στρατιώτες, πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες υπάρχουν στην οικογένειά τους.
β) Κάποιος θέλει να σχηματίσει μια ιδέα για το αποτέλεσμα των επερχόμενων βουλευτικών εκλογών. Τηλεφωνεί λοιπόν σε συγγενείς και φίλους του και τους ρωτάει σχετικά.
γ) Για να εκτιμήσουμε το κατά κεφαλή εισόδημα των Ελλήνων παίρνουμε ένα δείγμα από το Κολωνάκι των Αθηνών.
δ) Για να δούμε πώς διασκεδάζουν οι νέοι της χώρας μας επιλέγουμε κάποιους μαθητές από διάφορα Λύκεια της Αττικής.
ε) Ο διευθυντής ενός Λυκείου αποφάσισε να καταγράψει τους λόγους της απουσίας των μαθητών από το Λύκειο κατά τη διάρκεια της ακαδημαϊκής χρονιάς. Γι'αυτό τον λόγο πήρε ως δείγμα όσους απουσίασαν το Νοέμβριο.

2.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στατιστικοί Πίνακες

Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων είναι αναγκαία η κατασκευή συνοπτικών **πινάκων** ή **γραφικών παραστάσεων**, ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους και η εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων. Η παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων σε πίνακες γίνεται με την κατάλληλη τοποθέτηση των πληροφοριών σε γραμμές και στήλες, με τρόπο που να διευκολύνεται η σύγκριση των στοιχείων και η καλύτερη ενημέρωση του αναγνώστη σχετικά με τη δομή του πληθυσμού που ερευνάμε.

Οι πίνακες διακρίνονται στους:
α) **γενικούς πίνακες**, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων,
β) **ειδικούς πίνακες**, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.
Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:
α) τον **τίτλο**, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,
β) τις **επικεφαλίδες** των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,
γ) το **κύριο σώμα** (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα,
δ) την **πηγή**, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ’αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

Παρακάτω δίνονται μερικοί στατιστικοί πίνακες, που διευκρινίζουν την εφαρμογή των προηγούμενων εννοιών.

Πίνακας 1
Πληθυσμός της Ελλάδος (σε εκατομμύρια) κατά μεγάλες ομάδες ηλικιών

Ηλικία (σε έτη)	Απογραφή 1971	Απογραφή 1981	Απογραφή 1991	Εκτίμηση 1993	Εκτίμηση 1994
0-14	2,22	2,31	1,97	1,85	1,81
15-64	5,58	6,19	6,88	6,99	7,04
≥65	0,96	1,24	1,40	1,54	1,58

Πηγή: ΕΣΥΕ, 1996

Πίνακας 2
Επιφάνεια και πληθυσμός των κατοικημένων νησιών της Ελλάδας με πληθυσμό, κατά την απογραφή του 1991, άνω των 10.000 κατοίκων.

Κατοικημένες νήσοι	Επιφάνεια σε τ.χμ.	Πληθυσμός κατά τις απογραφές		
		1971	**1981**	**1991**
Κρήτη	8.261,183	456.471	502.082	539.938
Εύβοια	3.661,637	162.986	185.626	205.502
Λέσβος	1.635,998	97.008	88.601	87.151
Ρόδος	1.401,459	66.606	87.831	98.181
Χίος	842,796	52.487	48.700	51.060
Κεφαλληνία	734,014	31.787	27.649	29.392
Κέρκυρα	585,312	89.578	96.533	104.781
Σάμος	477,942	32.664	31.629	33.032
Λήμνος	476,288	17.367	15.721	17.645
Ζάκυνθος	406,612	30.180	30.011	32.556
Νάξος	389,434	14.201	14.037	14.838
Θάσος	383,672	13.316	13.111	13.527
Λευκάδα	301,106	22.917	19.947	19.350
Κως	287,611	16.650	20.350	26.379
Κάλυμνος	110,581	13.097	14.295	15.706
Σαλαμίνα	91,503	23.065	28.574	34.272
Σύρος	84,069	18.642	19.668	19.870
Αίγινα	77,014	9.553	11.127	11.639

Πηγή: ΕΣΥΕ, Απογραφή 1991

Πίνακας 3

Εργατικά ατυχήματα κατά ομάδες ηλικιών

Έτη 1990-94

Ηλικία	1990	1991	1992	1993	1994
Κάτω των 15	18	9	10	16	5
15-19	731	564	437	735	442
20-24	3323	2785	2755	2981	2696
25-29	4277	3921	4246	3881	3717
30-34	3952	3700	3388	3348	3282
35-39	3589	3146	3233	3230	3000
40-44	3237	2803	2911	2880	2903
45-49	2839	2593	2784	2608	2403
50-54	2727	2564	2286	2095	1877
55-59	2304	2230	2185	1699	1664
60-64	728	720	688	420	523
65-69	121	150	140	66	96
Σύνολο	27846	25185	25063	23959	22608

Πηγή: ΙΚΑ, Ελληνικό Ινστιτούτο Υγιεινής και Ασφάλειας τηςΕργασίας

Πίνακας 4

Χαρακτηριστικά 40 μαθητών Γ΄ τάξης ενός Λυκείου.

				Βαθμός			Ύψος	Ύψος

α.α	Φύλο	Ασχολία *	Αριθμός αδελφών	μαθηματικών Β΄ λυκείου	Ύψος (cm)	Βάρος (Kg)	πατέρα (cm)	μητέρας (cm)
1	Κ	4	1	15	170	60	172	168
2	Α	1	0	17	180	68	185	165
3	Κ	4	2	12	178	62	181	160
4	Κ	5	1	18	165	47	180	162
5	Κ	5	0	15	170	54	180	168
6	Κ	4	3	16	168	56	185	168
7	Κ	4	2	15	175	58	193	162
8	Α	4	1	15	175	72	174	174
9	Α	2	3	13	173	67	182	160
10	Κ	3	1	15	162	50	176	170
11	Κ	4	1	16	160	51	176	164
12	Α	2	1	11	170	58	182	165
13	Κ	7	3	20	167	50	174	170
14	Α	1	1	18	177	81	177	169
15	Α	1	0	17	180	70	170	165
16	Κ	2	2	19	170	63	165	174
17	Α	2	0	14	182	71	176	173
18	Α	7	2	17	178	73	182	170
19	Κ	4	1	14	165	58	180	161
20	Α	5	1	16	178	74	173	168
21	Κ	5	1	12	156	44	170	158
22	Κ	5	1	13	175	53	170	165
23	Α	5	2	18	172	60	178	165
24	Κ	6	1	16	173	64	182	162
25	Κ	6	2	14	167	57	172	157
26	Α	5	0	14	187	85	185	170
27	Κ	6	1	17	170	62	180	165
28	Α	3	1	12	180	80	180	167
29	Α	3	0	15	178	73	173	170
30	Α	2	1	10	191	86	180	170
31	Α	2	0	16	176	65	180	172
32	Κ	4	1	12	169	57	170	167
33	Κ	4	2	14	167	61	179	158
34	Κ	4	1	19	166	62	178	165
35	Α	3	1	19	179	76	178	160
36	Α	3	1	16	178	68	180	160
37	Α	5	1	19	180	85	170	163
38	Κ	5	1	19	164	64	184	170
39	Κ	3	0	15	170	63	165	167
40	Κ	4	1	15	173	63	186	162

*1: Υπολογιστές, 2:Αθλητισμός, 3:Διασκέδαση - Ντίσκο, 4:Μουσική,
5:Τηλεόραση -Κινηματογράφος, 6:Διάβασμα εξωσχολικών βιβλίων, 7:Άλλο
Πηγή: Δειγματοληπτική έρευνα μεταξύ μαθητών 1ου Λυκείου Αμαρουσίου (Σεπτ. ’98).

Πίνακες Κατανομής Συχνοτήτων

Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής *X*, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους *ν*, $\kappa \le \nu$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) **συχνότητα** (frequency) ν_i, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής *X* στο σύνολο των παρατηρήσεων. Είναι φανερό ότι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος *ν* του δείγματος, δηλαδή:

$$\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa = \nu \qquad (1)$$

Για παράδειγμα, για τη μεταβλητή *X*: "αριθμός αδελφών" του πίνακα 4 οι συχνότητες για τις τιμές $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ είναι, αντίστοιχα, $\nu_1 = 8$, $\nu_2 = 22$, $\nu_3 = 7$, $\nu_4 = 3$ με $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 40$. Ο υπολογισμός των συχνοτήτων γίνεται με τη **διαλογή** των παρατηρήσεων, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 5. Διατρέχοντας με τη σειρά τη λίστα των δεδομένων καταγράφουμε κάθε παρατήρηση με συμβολικό τρόπο σαν μια γραμμή " | " στην αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής.

Πίνακας 5

Κατανομή συχνοτήτων της μεταβλητής *X*: "αριθμός αδελφών" των μαθητών του πίνακα 4.

Αριθμός αδελφών x_i	Διαλογή	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική Συχνότητα f_i%
0	𝍸 |||	8	0,200	20,0
1	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	22	0,550	55,0
2	𝍸	7	0,175	17,5
3	|||| || |||	3	0,075	7,5
Σύνολο:		40	1,000	100,0

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος *ν* του δείγματος, προκύπτει η **σχετική συχνότητα** (relative frequency) f_i της τιμής x_i, δηλαδή

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \qquad i = 1,2,...,\kappa. \qquad (2)$$

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1,2,...,\kappa$ αφού $0 \le \nu_i \le \nu$.

(ii) $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$, αφού

$$f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε

συμβολίζονται με $f_i\%$, δηλαδή $f_i\% = 100 f_i$. Για παράδειγμα, οι σχετικές συχνότητες για τις τιμές $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ της μεταβλητής *X*: "αριθμός αδελφών΄" είναι αντιστοίχως:

$f_1 = \frac{8}{40} = 0{,}20$, $f_2 = \frac{22}{40} = 0{,}55$, $f_3 = \frac{7}{40} = 0{,}175$ και $f_4 = \frac{3}{40} = 0{,}075$ με $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0{,}20 + 0{,}55 + 0{,}175 + 0{,}075 = 1$.

Συνεπώς $f_1\% = 20\%$, $f_2\% = 55\%$, $f_3\% = 17{,}5\%$ και $f_4\% = 7{,}5\%$ με $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 100\%$.

Οι ποσότητες x_i, v_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** ή απλά **πίνακας συχνοτήτων**.

Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, v_i) λέμε ότι αποτελεί την **κατανομή συχνοτήτων** και το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i), ή των ζευγών $(x_i, f_i\%)$, την **κατανομή των σχετικών συχνοτήτων**. Στον πίνακα 5 παρουσιάζονται οι κατανομές συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων της μεταβλητής *X*: "αριθμός αδελφών" των μαθητών του πίνακα 4.

Αθροιστικές Συχνότητες

Στην περίπτωση των **ποσοτικών μεταβλητών** εκτός από τις συχνότητες v_i και f_i χρησιμοποιούνται συνήθως και οι λεγόμενες **αθροιστικές συχνότητες** (cumulative frequencies) N_i και οι **αθροιστικές σχετικές συχνότητες** (cumulative relative frequencies) F_i, οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i. Συχνά οι F_i πολλαπλασιάζονται επί 100 εκφραζόμενες έτσι επί τοις εκατό, δηλαδή $F_i\% = 100F_i$, βλέπε πίνακα 6. Αν οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ μιας ποσοτικής μεταβλητής *X* είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι $N_i = v_1 + v_2 + ... + v_i$. Όμοια, η αθροιστική σχετική συχνότητα είναι $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$, για $i = 1, 2, ..., \kappa$. Για παράδειγμα, για τη μεταβλητή *X*: "αριθμός αδελφών" του πίνακα 4 είναι $N_1 = v_1 = 8$, $N_2 = v_1 + v_2 = 30$, $N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 37$ και $N_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v = 40$, οπότε

$F_1 = f_1 = 0{,}20$, $F_2 = f_1 + f_2 = 0{,}75$, $F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}925$ και $F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$, οπότε $F_1\% = 20\%$, $F_2\% = 75\%$, $F_3\% = 92{,}5\%$ και $F_4\% = 100\%$. Είναι φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$v_1 = N_1,\ v_2 = N_2 - N_1, ..., v_\kappa = N_\kappa - N_{\kappa-1}$$

και

$$f_1 = F_1, \quad f_2 = F_2 - F_1, ..., f_\kappa = F_\kappa - F_{\kappa-1}.$$

Πίνακας 6

Κατανομή συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων της μεταβλητής "αριθμός αδελφών" των μαθητών του πίνακα 4.

Αριθμός αδελφών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετ. Συχν. f_i	Σχετ. Συχν. f_i %	Αθροισ. Συχν. N_i	Αθροιστική Σχετ. Συχν. F_i	Αθροιστική Σχετ. Συχν. F_i %
0	8	0,200	20,0	8	0,200	20,0
1	22	0,550	55,0	30	0,750	75,0
2	7	0,175	17,5	37	0,925	92,5
3	3	0,075	7,5	40	1,000	100,0
Σύνολο:	40	1,000	100,0	—	—	—

Γραφική Παράσταση Κατανομής Συχνοτήτων

Τα στατιστικά δεδομένα παρουσιάζονται πολλές φορές και υπό μορφή γραφικών παραστάσεων ή διαγραμμάτων. Οι γραφικές παραστάσεις παρέχουν πιο σαφή εικόνα του χαρακτηριστικού σε σχέση με τους πίνακες, είναι πολύ πιο ενδιαφέρουσες και ελκυστικές, χωρίς βέβαια να προσφέρουν περισσότερη πληροφορία από εκείνη που περιέχεται στους αντίστοιχους πίνακες συχνοτήτων. Επί πλέον με τα διαγράμματα διευκολύνεται η σύγκριση μεταξύ ομοειδών στοιχείων για το ίδιο ή για διαφορετικά χαρακτηριστικά.
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι γραφικής παρουσίασης, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που έχουμε. Όπως όμως οι στατιστικοί πίνακες έτσι και τα στατιστικά διαγράμματα πρέπει να συνοδεύονται από α) τον τίτλο, β) την κλίμακα με τις τιμές των μεγεθών που απεικονίζονται, γ) το υπόμνημα που επεξηγεί συνήθως τις τιμές της μεταβλητής και δ) την πηγή των δεδομένων.

α) Ραβδόγραμμα

Το **ραβδόγραμμα** (barchart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής X αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα. Έτσι έχουμε αντίστοιχα το **ραβδόγραμμα συχνοτήτων** και το **ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**. Τόσο η απόσταση μεταξύ των στηλών όσο και το μήκος των βάσεών τους καθορίζονται αυθαίρετα. Στον πίνακα 7 έχουμε την κατανομή συχνοτήτων της μεταβλητής X: "απασχόληση στον

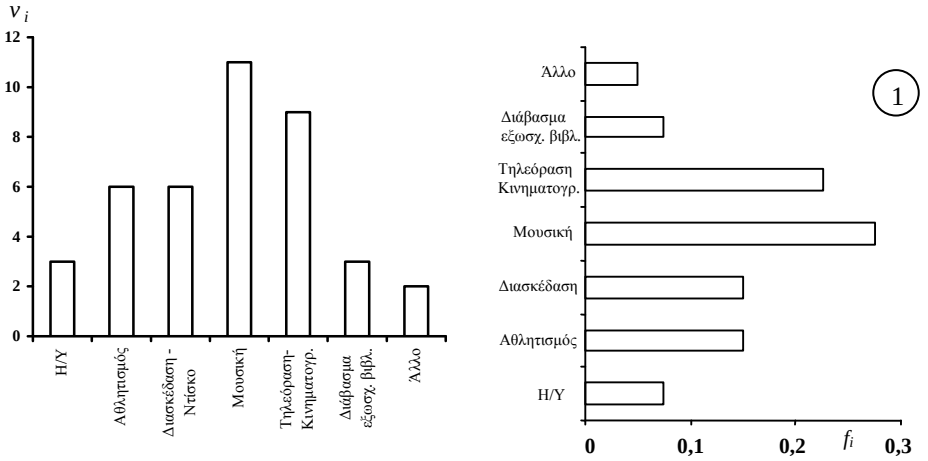
ελεύθερο χρόνο” και στα σχήματα 1(α), (β) τα αντίστοιχα ραβδογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

Πίνακας 7

Κατανομή συχνοτήτων για την απασχόληση στον ελεύθερο χρόνο τους των μαθητών του πίνακα 4.

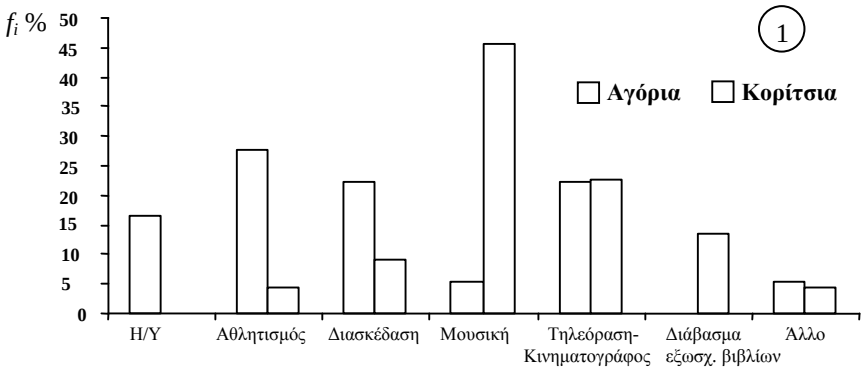
i	Απασχόληση x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα f_i%
1	Υπολογιστές	3	0,075	7,5
2	Αθλητισμός	6	0,150	15,0
3	Διασκέδαση-ντίσκο	6	0,150	15,0
4	Μουσική	11	0,275	27,5
5	Τηλεόραση-Κινηματογράφος.	9	0,225	22,5
6	Διάβασμα εξωσχ. Βιβλίων	3	0,075	7,5
7	Άλλο	2	0,050	5,0
Σύνολο:		40	1,000	100,0

Μερικές φορές σε ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων ο ρόλος των δύο αξόνων είναι δυνατόν να αντιστραφεί, όπως φαίνεται στο σχήμα 1(β), που παριστάνεται το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων της ίδιας μεταβλητής. Αν θέλουμε να συγκρίνουμε τον τρόπο που περνούν τον ελεύθερο χρόνο τους τα αγόρια και τα κορίτσια, τότε κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων του σχήματος 1(γ), όπως προκύπτει από τον πίνακα 4.



(α) (β)

Ραβδόγραμμα συχνοτήτων (α) και σχετικών συχνοτήτων (β) για την απασχόληση των μαθητών του πίνακα 7.



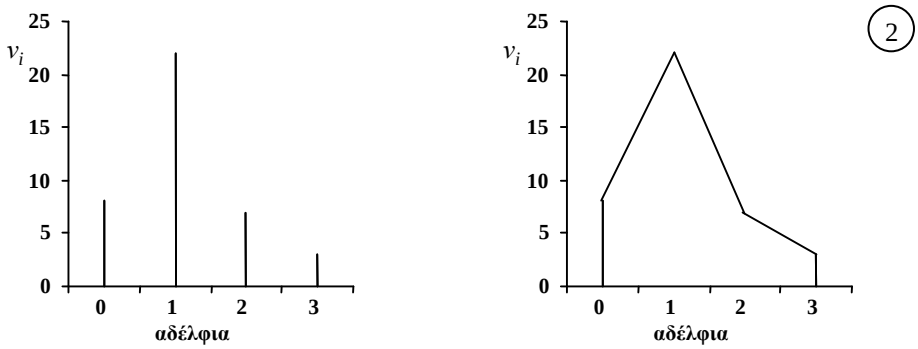
(γ)

Ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων για την απασχόληση των μαθητών του πίνακα 4 ανάλογα με το φύλο.

β) Διάγραμμα Συχνοτήτων

Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων** (line diagram). Αυτό μοιάζει με το ραβδόγραμμα με μόνη διαφορά ότι αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια υψώνουμε σε κάθε x_i (υποθέτοντας ότι $x_1 < x_2 < ... < x_\kappa$) μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2(α). Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων v_i στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες f_i, οπότε έχουμε το **διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων**.

Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) ή (x_i, f_i) έχουμε το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**, αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε, βλέπε σχήμα 2(β).



(α) (β)

Διάγραμμα συχνοτήτων (α) και πολύγωνο συχνοτήτων (β) για τη μεταβλητή "αριθμός αδελφών" του πίνακα 4.

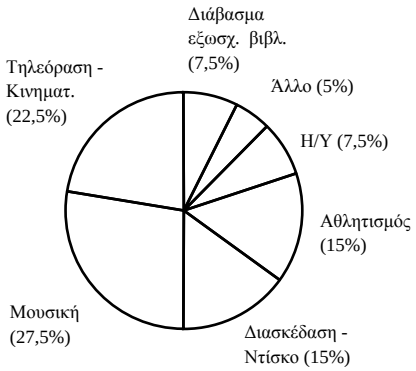
γ) Κυκλικό Διάγραμμα

Το **κυκλικό διάγραμμα** (piechart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ,ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε

$$\alpha_i = \nu_i \frac{360^{\circ}}{\nu} = 360^{\circ} f_i \quad \text{για} \quad i = 1,2,...,\kappa \, .$$

Στο σχήμα 3 παριστάνεται το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων της “απασχόλησης των μαθητών” για τα δεδομένα του πίνακα 4.

Κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων της απασχόλησης των μαθητών για τα δεδομένα του πίνακα 4.

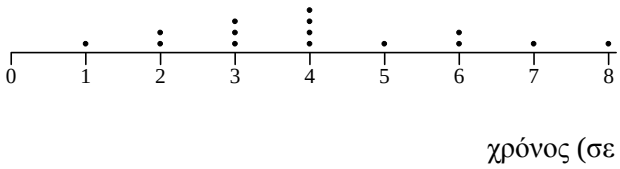


3

δ) Σημειόγραμμα

Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα** (dot diagram), στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα. Στο σχήμα 4 έχουμε το σημειόγραμμα των χρόνων (σε λεπτά) 4,2,3,1,5,6,4,2,3,4,7,4,8,6,3 που χρειάστηκαν δεκαπέντε μαθητές, για να λύσουν ένα πρόβλημα.

4

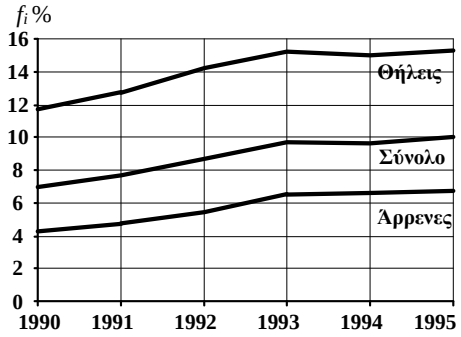


ε) Χρονόγραμμα.

Το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής. Στο σχήμα 5 έχουμε το χρονόγραμμα του ποσοστού ανεργίας στη χώρα μας από το 1990 έως το 1995. (Πηγή ΕΣΥΕ).

Παρατηρούμε ότι στο γυναικείο πληθυσμό υπάρχει συστηματικά μεγαλύτερο ποσοστό ανεργίας, γύρω στις 8 εκατοστιαίες μονάδες. Στο διάστημα 1993-95 το ποσοστό ανεργίας έχει σταθεροποιηθεί γύρω στο 6,5% για τους άνδρες και γύρω στο 15% για τις γυναίκες.

5



Ποσοστά ανεργίας στηνΕλλάδα

Ομαδοποίηση των Παρατηρήσεων

Οι πίνακες συχνοτήτων και κατ'αναλογίαν τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι δύσκολο να κατασκευαστούν, όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό μπορεί να συμβεί είτε στην περίπτωση μιας διακριτής μεταβλητής είτε, πολύ περισσότερο, στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, όπου αυτή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα ορισμού της. Σ'αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν (ομαδοποιηθούν) τα δεδομένα σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται και **κλάσεις** (class intervals), έτσι ώστε κάθε τιμή να ανήκει μόνο σε μία κλάση. Τα άκρα των κλάσεων καλούνται **όρια των κλάσεων** (class boundaries). Συνήθως υιοθετούμε την περίπτωση που μια κλάση περιέχει το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά) αλλά όχι το άνω άκρο της (ανοικτή δεξιά), δηλαδή που οι κλάσεις είναι της μορφής [,). Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται όμοιες, οπότε μπορούν να "αντιπροσωπευθούν" από τις **κεντρικές τιμές**, τα κέντρα δηλαδή κάθε κλάσης.

- Το πρώτο βήμα στην ομαδοποίηση των δεδομένων είναι η εκλογή του αριθμού *κ* των ομάδων ή κλάσεων. Ο αριθμός αυτός συνήθως ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του. Γενικά όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός ο παρακάτω πίνακας:

Μέγεθος δείγματος ν	Αριθμός κλάσεων κ	Μέγεθος δείγματος ν	Αριθμός κλάσεων κ
< 20	5	$200 - 400$	9
$20 - 50$	6	$400 - 700$	10
$50 - 100$	7	$700 - 1000$	11
$100 - 200$	8	≥ 1000	12

- Το δεύτερο βήμα είναι ο προσδιορισμός του πλάτους των κλάσεων. **Πλάτος μιας κλάσης** ονομάζεται η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης. Στην πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών οι κλάσεις έχουν το ίδιο πλάτος. Φυσικά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου επιβάλλεται οι κλάσεις να έχουν άνισο πλάτος, όπως, για παράδειγμα, στις κατανομές εισοδήματος, ημερών απεργίας κτλ. Για να κατασκευάσουμε ισοπλατείς κλάσεις, χρησιμοποιούμε το **εύρος** (range) R του δείγματος, δηλαδή τη διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση του συνολικού δείγματος. Τότε υπολογίζουμε το πλάτος c των κλάσεων διαιρώντας το εύρος R διά του αριθμού των κλάσεων κ, στρογγυλεύοντας, αν χρειαστεί για λόγους διευκόλυνσης, πάντα προς τα πάνω.

- Το επόμενο βήμα είναι η κατασκευή των κλάσεων. Ξεκινώντας από την μικρότερη παρατήρηση, ή για πρακτικούς λόγους λίγο πιο κάτω από την μικρότερη παρατήρηση, και προσθέτοντας κάθε φορά το πλάτος c δημιουργούμε τις κ κλάσεις. Αυτονόητο είναι ότι η μεγαλύτερη τιμή του δείγματος θα (πρέπει να) ανήκει οπωσδήποτε στην τελευταία κλάση.

- Τέλος, γίνεται η **διαλογή** των παρατηρήσεων. Το πλήθος των παρατηρήσεων ν_i που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση i καλείται **συχνότητα της κλάσης** αυτής ή **συχνότητα της κεντρικής τιμής** x_i, $i = 1,2,...,\kappa$.

Έστω, για παράδειγμα, ότι από τα δεδομένα του πίνακα 4 εξετάζουμε το ύψος των μαθητών. Το ύψος των μαθητών, όπως έχει καταγραφεί με τη σειρά, δίνεται στον παρακάτω πίνακα 8.

Πίνακας 8

Το ύψος (σε cm) των μαθητών της Γ΄ Λυκείου, όπως έχει καταγραφεί στον πίνακα 4. Σε αγκύλες έχουμε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή.

170	180	178	165	170	168	175	175	173	162
160	170	167	177	180	170	182	178	165	178
[156]	175	172	173	167	187	170	180	178	[191]
176	169	167	166	179	178	180	164	170	173

Παρατηρούμε ότι το εύρος του δείγματος είναι $R = 191 - 156 = 35$. Επειδή έχουμε $\nu = 40$ παρατηρήσεις, χρησιμοποιούμε $\kappa = 6$ κλάσεις. Το πλάτος των

κλάσεων είναι $c = R / \kappa = 35 / 6 = 5{,}83 \approx 6$. Αν θεωρήσουμε ως αρχή της πρώτης κλάσης το 156, θα έχουμε τον επόμενο πίνακα 9.

Πρέπει να προσεχτεί ότι:

- Καμία παρατήρηση δεν μπορεί να μείνει έξω από κάποια κλάση.
- Οι κεντρικές τιμές διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος των κλάσεων, που εδώ είναι ίσο με 6.
- Μία παρατήρηση που συμπίπτει με το άνω άκρο μιας κλάσης θα τοποθετηθεί κατά τη διαλογή στην αμέσως επόμενη κλάση. Για παράδειγμα, ο μαθητής με ύψος 180 θα τοποθετηθεί στην πέμπτη κλάση [180, 186).

Πίνακας 9

Κατανομές συχνοτήτων (απόλυτων, σχετικών, αθροιστικών) για τα δεδομένα του πίνακα 8.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Διαλογή	Συχν. v_i	Σχετική Συχνότητα f_i %	Αθρ.συχν. N_i	Αθρ. Σχετ. Συχν. F_i %
156-162	159	||	2	5,0	2	5,0
162-168	165	𝍸 |||	8	20,0	10	25,0
168-174	171	𝍸 𝍸 |	12	30,0	22	55,0
174-180	177	𝍸 𝍸	11	27,5	33	82,5
180-186	183	𝍸 |||| |	5	12,5	38	95,0
186-192	189	|||| ||	2	5,0	40	100,0
	Σύνολο	—	40	100	—	—

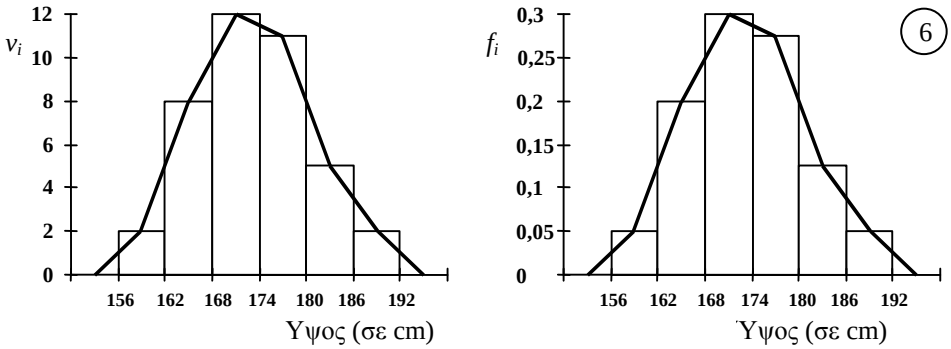
Ιστόγραμμα Συχνοτήτων

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το λεγόμενο **ιστόγραμμα** (histogram) συχνοτήτων. Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το **εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής**.

α) Κλάσεις Ίσου Πλάτους

Θεωρώντας το πλάτος c ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, έτσι ώστε να ισχύει πάλι ότι το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι ίσο με τις αντίστοιχες συχνότητες. Επομένως, στον κατακόρυφο άξονα σε

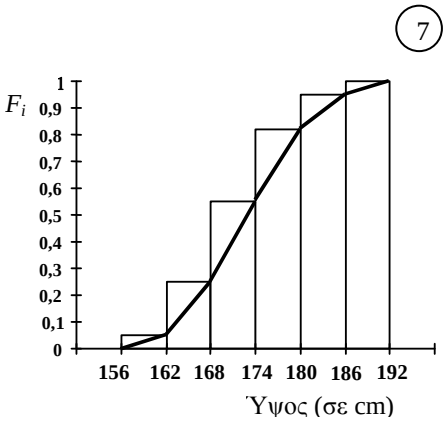
ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων βάζουμε τις συχνότητες. Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται και το **ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**, οπότε στον κάθετο άξονα βάζουμε τις σχετικές συχνότητες.
Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** (frequency polygon). Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος *ν*. Όμοια κατασκευάζεται από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων** με εμβαδόν ίσο με 1, (βλέπε σχήμα 6).



(α) (β)

Ιστόγραμμα και πολύγωνο (α) συχνοτήτων και (β) σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα του πίνακα 9.

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και τα **ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων** και **αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων**. Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα **δεξιά άκρα** (όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** (ogive) της κατανομής. Στο σχήμα 7 παριστάνεται το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για το ύψος των μαθητών του πίνακα 9 .



β) Κλάσεις Άνισου Πλάτους

Όπως προαναφέραμε, συνήθως επιλέγουμε κλάσεις ίσου πλάτους. Υπάρχουν

όμως και περιπτώσεις που είναι απαραίτητο να έχουμε κλάσεις διαφορετικού πλάτους όπως, για παράδειγμα, στην κατανάλωση νερού και ηλεκτρικού ρεύματος ή ακόμα και περιπτώσεις όπου οι συχνότητες σε κάποιες κλάσεις να είναι πολύ μικρές οπότε γίνεται συγχώνευση κλάσεων.

Έστω, για παράδειγμα, η διάρκεια (σε sec) ν=80 τηλεφωνημάτων που έγιναν τυχαία από ένα κινητό τηλέφωνο, η οποία δίνεται στο διπλανό πίνακα συχνοτήτων.

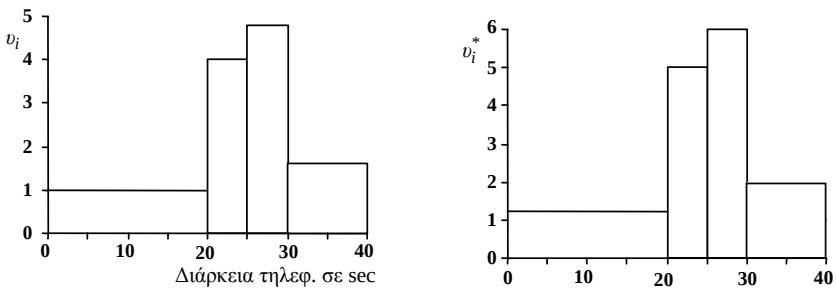
Διάρκεια τηλεφ. σε sec	Συχνότητα ν_i
0-20	20
20-25	20
25-30	24
30-40	16
Σύνολο	$\nu = 80$

Το αντίστοιχο ιστόγραμμα συχνοτήτων κατασκευάζεται πάλι, έτσι ώστε το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης. Άρα, αν c_i είναι το πλάτος της κλάσης i με συχνότητα ν_i, το ύψος του ορθογωνίου θα είναι $\upsilon_i = \dfrac{\nu_i}{c_i}$, $i = 1,2,...,\kappa$. Επομένως, για την κατασκευή του ιστογράμματος συχνοτήτων χρειαζόμαστε τα πλάτη των κλάσεων και τα ύψη των ορθογωνίων. Αυτά δίνονται στον επόμενο πίνακα.

Διάρκεια τηλεφ. σε sec.	Πλάτος κλάσης c_i	Συχνότητα ν_i	Ύψος $\upsilon_i = \dfrac{\nu_i}{c_i}$	Ύψος $\upsilon_i^* = \dfrac{f_i\,\%}{c_i}$
0-20	20	20	1,0	1,25
20-25	5	20	4,0	5,00
25-30	5	24	4,8	6,00
30-40	10	16	1,6	2,00

Τότε το ιστόγραμμα συχνοτήτων δίνεται στο σχήμα 8(α). Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων είναι ίσο με το συνολικό μέγεθος δείγματος ν, όπως δηλαδή συμβαίνει και στο ιστόγραμμα με κλάσεις ίσου πλάτους .

8



(α) (β)

Ιστόγραμμα συχνοτήτων (α) και σχετικών συχνοτήτων (β)

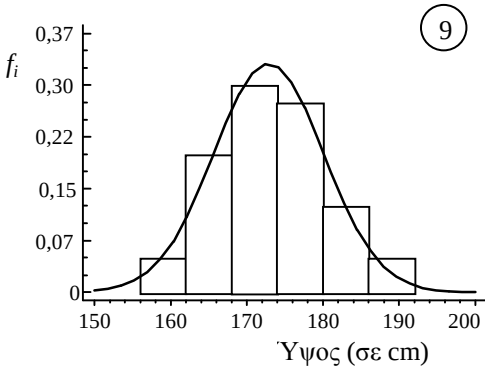
της διάρκειας τηλεφωνημάτων.

Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται και το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, (σχήμα 8(β)) αρκεί να χρησιμοποιήσουμε ως ύψος των ορθογωνίων το λόγο των σχετικών συχνοτήτων προς το πλάτος των κλάσεων, δηλαδή $\upsilon_i^* = \frac{f_i\%}{c_i}$.

Καμπύλες Συχνοτήτων

Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων** (frequency curve), όπως δείχνει το σχήμα 9. Οι καμπύλες συχνοτήτων έχουν μεγάλη εφαρμογή στη Στατιστική, όπου οι ιδιότητες τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

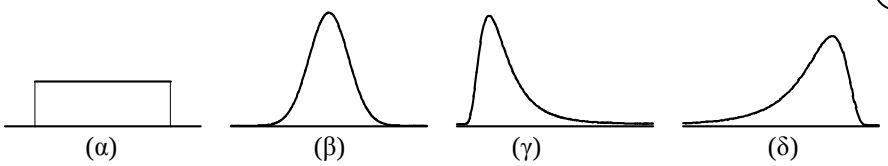
9



Καμπύλη συχνοτήτων για το ύψος των μαθητών του πίνακα 4

Η μορφή μιας κατανομής συχνοτήτων εξαρτάται από το πώς είναι κατανεμημένες οι παρατηρήσεις σε όλη την έκταση του εύρους τους. Μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων που συναντάμε συχνά στις εφαρμογές δίνονται στο σχήμα 10. Η κατανομή (β), με "κωδωνοειδή" μορφή λέγεται **κανονική κατανομή** (normal distribution) και παίζει σπουδαίο ρόλο στη Στατιστική. Όταν οι παρατηρήσεις "κατανέμονται" ομοιόμορφα σε ένα διάστημα [α, β], όπως στην κατανομή (α), η κατανομή λέγεται **ομοιόμορφη**. Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, η κατανομή λέγεται ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία όπως στην κατανομή (γ) ή αρνητική ασυμμετρία όπως στην κατανομή (δ).

10



Μερικές χαρακτηριστικές κατανομές συχνοτήτων

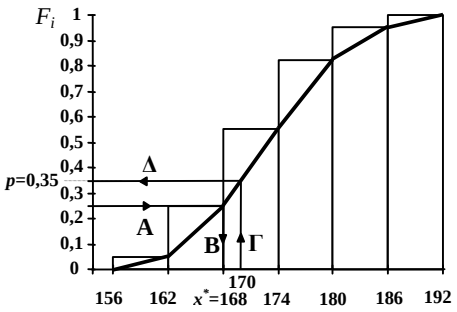
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων του παρακάτω διαγράμματος να βρεθεί

(α) το ύψος x^*, κάτω από το οποίο ανήκει το 25% των μαθητών
(β) το ποσοστό *p* των μαθητών που έχουν ύψος μέχρι και 170cm.

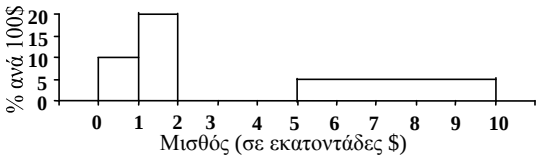
ΛΥΣΗ

α) Ακολουθούμε τη διαδρομή *AB*, όπως φαίνεται στο διάγραμμα, και ξεκινώντας από το σημείο (0, 0,25) πηγαίνουμε παράλληλα προς τον άξονα $0x$ μέχρι το αθροιστικό διάγραμμα και μετά κάθετα στον άξονα $0x$ μέχρι το σημείο $(x^*,0)$. Το $x^* = 168$ είναι το ζητούμενο ύψος.



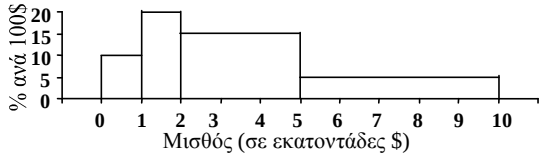
β) Όμοια, ακολουθώντας τη διαδρομή ΓΔ από το σημείο (170, 0) καταλήγουμε, όπως φαίνεται στο σχήμα, στο σημείο $(0, p)$. Το $p = 0{,}35 = 35\%$ είναι το ζητούμενο ποσοστό.

2. Στο διπλανό ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων σβήστηκε κατά λάθος το ορθογώνιο της κλάσης [2-5). Εάν είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει μισθός άνω των $1000, να κατασκευάσετε το ορθογώνιο αυτό.



ΛΥΣΗ

Επειδή έχουμε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ($f_i\%$), το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων θα πρέπει να ισούται με 100. Το εμβαδόν του πρώτου ορθογωνίου είναι $E_1 = (1-0)\cdot 10 = 10$, του δεύτερου ορθογωνίου $E_2 = (2-1)\cdot 20 = 20$, και του τέταρτου $E_4 = (10-5)\cdot 5 = 25$. Άρα, το εμβαδόν του τρίτου ορθογωνίου θα είναι $E_3 = 100 - (10 + 20 + 25) = 45$. Επειδή το πλάτος του ορθογωνίου είναι $5 - 2 = 3$, το ύψος του θα είναι $45/3 = 15$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η βαθμολογία 50 φοιτητών στις εξετάσεις ενός μαθήματος είναι:

3	4	5	8	9	7	6	8	7	10
8	7	6	5	9	3	8	5	6	6
6	3	5	6	4	2	9	8	7	7
1	6	3	1	5	8	1	2	3	4
5	6	7	9	10	9	8	7	6	5

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (απολύτων και αθροιστικών).

β) Από τον πίνακα αυτό να εκτιμήσετε το ποσοστό των φοιτητών που πήραν βαθμό i) κάτω από τη βάση (μικρότερο του 5) ii) άριστα (9 ή 10) ii) τουλάχιστον 7 αλλά το πολύ 9.

2. Οι παραπάνω φοιτητές ήταν αντίστοιχα αγόρια (Α) ή κορίτσια (Κ):

Α	Α	Κ	Α	Κ	Α	Α	Α	Κ	Κ
Κ	Κ	Α	Α	Α	Κ	Α	Κ	Α	Α
Α	Α	Α	Α	Κ	Κ	Α	Κ	Α	Κ
Κ	Κ	Κ	Α	Κ	Κ	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Κ	Α	Κ	Κ	Α	Α	Α	Κ

Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα χρησιμοποιώντας απόλυτες συχνότητες.

Φύλο	Βαθμολογία		Σύνολο
	<5	≥5	
Α			
Κ			
Σύνολο			

3. Να μετατρέψετε τον προηγούμενο πίνακα συχνοτήτων της άσκησης 2 σε πίνακα σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό:

α) ως προς το σύνολο των φοιτητών

β) ως προς το φύλο (γραμμές)

γ) ως προς τη βαθμολογία (στήλες).

4. Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων, που δίνει την κατανομή του αριθμού των ημερών απουσίας από την εργασία τους λόγω ασθένειας 50 εργατών, να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των εργατών που απουσίασαν:

α) τουλάχιστον 1 ημέρα
β) πάνω από 5 ημέρες
γ) από 3 έως 5 ημέρες
δ) το πολύ 5 ημέρες
ε) ακριβώς 5 ημέρες.

Αριθμός ημερών	Συχνότητα	Αριθμός ημερών	Συχνότητα
0	12	5	8
1	8	6	0
2	5	7	5
3	4	8	2
4	5	9	1

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	f_i%	F_i%
1						10
2	4	0,20	6			
3				0,60		
4					25	
5	2					
6						
Σύνολο						

6. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων του βαθμού Μαθηματικών για τα αγόρια και κορίτσια (χωριστά) του πίνακα 4.

7. Τα δημοφιλέστερα ξένα μουσικά συγκροτήματα των 18 αγοριών του πίνακα 4 ήσαν:

Metallica, Iron Maiden, Άλλο, Scorpions, Oasis, Άλλο, Άλλο, Rolling Stones, Metallica, Metallica, Rolling Stones, Metallica, Iron Maiden, Iron Maiden, Scorpions, Scorpions, Scorpions, Metallica.

Να κατασκευάσετε α) το ραβδόγραμμα και β) το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

8. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται η βαθμολογία των 450 μαθητών ενός Γυμνασίου σε τέσσερις κατηγορίες “Άριστα”, “Λίαν Καλώς”, “Καλώς” και “Σχεδόν Καλώς”. Το 30% των μαθητών έχουν επίδοση “Λίαν Καλώς”. Η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση “Καλώς” είναι 144^0. Οι μαθητές με βαθμό “Σχεδόν Καλώς” είναι διπλάσιοι των μαθητών με “Άριστα”. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

9. Από το 1960 έως το 1998 (Πρωταθλήματα Α΄ Εθνικής) ο Παναθηναϊκός έχει κατακτήσει 15 τίτλους, ο Ολυμπιακός 12, η ΑΕΚ 9, ο ΠΑΟΚ 2 και η Λάρισα 1. Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα και το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

10. Παρακάτω δίνονται τα μετάλλια που πήραν μερικές χώρες στο 17ο Ευρωπαϊκό Πρωτάθλημα Στίβου, το 1998. Να παρασταθούν τα δεδομένα αυτά σε ένα ραβδόγραμμα.

Χώρα	Χρυσά	Ασημένια	Χάλκινα
Μ. Βρετανία	9	4	3
Γερμανία	8	7	8
Ρωσία	6	9	7
Πολωνία	3	4	1
Ρουμανία	3	2	2
Ουκρανία	3	2	1
Ιταλία	2	4	3
Πορτογαλία	2	3	1
Ισπανία	2	1	4
Γαλλία	2	1	1
Ελλάδα	1	0	2

11. Τα κρούσματα δύο λοιμωδών νόσων από το 1987 έως το 1997 δίνονται στο διπλανό πίνακα. (Πηγή: ΕΚΕΠΑΠ.)
Να κατασκευάσετε τα αντίστοιχα χρονογράμματα και να τα σχολιάσετε.

Έτος	Έρπης ζωστήρ	Ηπατίτιδα Α
1987	85	351
1988	58	254
1989	123	273
1990	178	172
1991	134	213
1992	201	127
1993	241	123
1994	252	259
1995	338	295
1996	296	107
1997	256	131

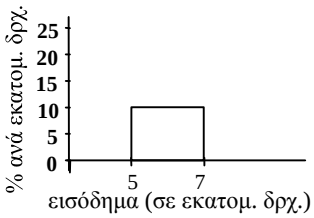
12. Τα παρακάτω δεδομένα αντιπροσωπεύουν την επίδοση 50 υποψηφίων για την πρόσληψή τους σε μια ιδιωτική σχολή (κλίμακα 0-10).

6 7 8 5 1 4 7 3 9 9 2 5 3 8 6 7 7 6 8 1 3 0 1 4 9
0 9 7 8 6 1 2 3 5 4 6 6 4 3 2 8 8 7 7 6 5 5 9 2 4

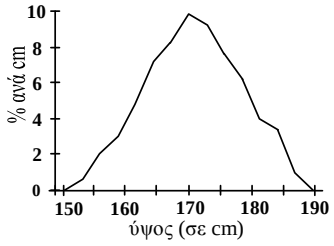
α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.
β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
γ) Αν η σχολή θελήσει να πάρει όσους είχαν επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 8, πόσους θα πάρει;

δ) Αν η σχολή πάρει μόνο το 36% των υποψηφίων, τι επίδοση πρέπει να έχει κάποιος για να επιλεγεί;

13. Δίπλα δίνεται μόνο ένα ορθογώνιο από το ιστόγραμμα του ετήσιου εισοδήματος των οικογενειών μιας περιοχής. Τι ποσοστό οικογενειών της περιοχής είχαν εισόδημα 5.000.000 δρχ. έως 7.000.000 δρχ.;



14. Ένας μαθητής έκανε το διπλανό πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων για το ύψος των αγοριών της τάξης του και ο καθηγητής το διέγραψε σαν λάθος. Είχε δίκιο ο καθηγητής;



Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

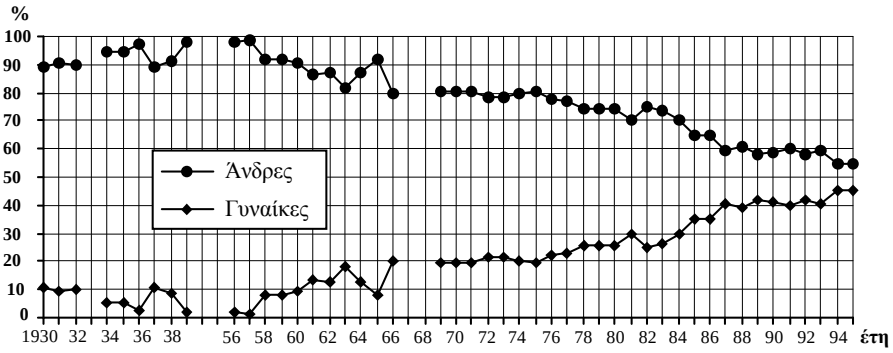
1. Να κατασκευάσετε τα αντίστοιχα χρονογράμματα για τον πληθυσμό των νησιών α) Λέσβου, β) Θάσου, γ) Σαλαμίνας με βάση τα δεδομένα του πίνακα 2. Τι συμπέρασμα συνάγετε;

2. Οι βεβαιωθέντες θάνατοι από χρήση ναρκωτικών κατά τα έτη 1988-1998 (για το 1998 έως 8 Απριλίου) σύμφωνα με τον Οργανισμό κατά των Ναρκωτικών (ΟΚΑΝΑ) ήταν 62, 72, 66, 79, 79, 78, 146, 176, 222, 222 και 65 αντίστοιχα. Από αυτούς είχαμε 7, 4, 2, 2, 1, 4, 8, 7, 14, 22 και 6 μέχρι και 20 ετών, 43, 51, 34, 44, 47, 49, 71, 90, 98, 99 και 33 από 21-30 ετών και οι υπόλοιποι ήσαν άνω των 30 ετών.
Να παρασταθούν τα δεδομένα αυτά σε μορφή πίνακα.

3. Να παρασταθούν τα παραπάνω δεδομένα της άσκησης 2 σε μορφή πίνακα αναφορικά με το έτος και το φύλο των ατόμων, αν γνωρίζουμε ότι από τους βεβαιωθέντες θανάτους από χρήση ναρκωτικών κατά τα έτη 1988-1998 οι 8, 10, 7, 5, 9, 8, 11, 14, 20, 20 και 9 αντίστοιχα ήταν γυναίκες.

4. Το παρακάτω χρονόγραμμα δίνει τη σχετική συχνότητα των νέων πτυχιούχων Μαθηματικών σε όλη την Ελλάδα από το 1930 έως το 1995 ανάλογα με το φύλο. α) Μελετώντας προσεκτικά το χρονόγραμμα αυτό ποιά συμπεράσματα εξάγονται; β) Ο συνολικός αριθμός νέων πτυχιούχων Μαθηματικών το έτος 1995 ήταν 789. Πόσες ήσαν οι γυναίκες και πόσοι οι άνδρες; γ) Ο αριθμός των γυναικών που έγιναν πτυχιούχοι Μαθηματικών το έτος 1974 ήσαν 173. Πόσοι ήσαν οι άνδρες που έγιναν πτυχιούχοι

Μαθηματικοί το ίδιο έτος; δ) Πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες πήραν πτυχίο Μαθηματικών στην Ελλάδα το 1985;



5. Να δοθεί και να ερμηνευτεί το χρονόγραμμα των δεδομένων του πίνακα 1 για κάθε ομάδα ηλικιών.

6. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων της συστολικής πίεσης 150 γυναικών ηλικίας 17-24 ετών που χρησιμοποιούν το φάρμακο Α για κάποια πάθηση και 200 γυναικών, ανάλογης ηλικίας, που χρησιμοποιούν το φάρμακο Β.

α) Να συγκρίνετε τα ποσοστά γυναικών που παίρνουν τα φάρμακα Α και Β και έχουν συστολική πίεση μεγαλύτερη ή ίση των 130 mm Hg

β) Να κατασκευάσετε τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, χρησιμοποιώντας τους ίδιους άξονες συντεταγμένων.

Συστολική πίεση (σε mm Hg)	Φάρμακο Α	Φάρμακο Β
	ν_i	ν_i
95-99	6	4
100-104	15	14
105-109	16	18
110-114	22	24
115-119	30	32
120-124	20	28
125-129	15	28
130-134	12	26
135-139	6	12
140-144	5	8
145-149	3	6
Σύνολο	150	200

Πηγή: Υποθετικά δεδομένα

7. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 55 μαθητές να λύσουν ένα πρόβλημα δίνονται παρακάτω:

3,4	13,2	6,7	1,4	1,3	3,8	3,9	2,9	13,8	3,9	2,7
4,4	3,6	1,4	2,4	3,6	3,1	7,5	6,9	7,8	12,7	3,9
3,3	9,7	2,0	4,4	3,3	8,7	3,9	11,6	5,6	9,0	3,4
1,4	3,5	2,8	10,4	11,9	12,3	2,9	2,8	1,5	4,1	5,9
3,1	8,7	2,8	3,8	13,0	3,0	6,4	3,2	5,9	7,0	8,2

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κατάλληλο αριθμό κλάσεων.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις συχνότητες ν_i, $f_i\%$, N_i, $F_i\%$.

γ) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

2.3 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

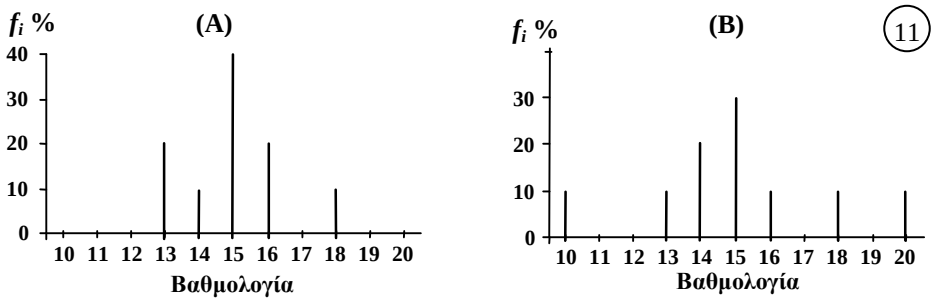
Εισαγωγή

Εκτός από τους στατιστικούς πίνακες και τα διαγράμματα υπάρχουν και αριθμητικά μέτρα με τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε με συντομία μια κατανομή συχνοτήτων. Η γνώση των μέτρων αυτών διευκολύνει και την παραπέρα στατιστική επεξεργασία των δεδομένων. Έστω, για παράδειγμα, ένας καθηγητής ο οποίος, για να συγκρίνει δύο διαφορετικά τμήματα *A* και *B* της ίδιας τάξης ως προς την επίδοσή τους σε ένα μάθημα, πήρε τυχαία 10 μαθητές από κάθε τμήμα. Η βαθμολογία τους στο μάθημα αυτό ήταν:

Τμήμα Α: 13 13 14 15 15 15 15 16 16 18

Τμήμα Β: 10 13 14 14 15 15 15 16 18 20.

Τα διαγράμματα σχετικών συχνοτήτων δίνονται στα σχήματα 11(α), (β) .



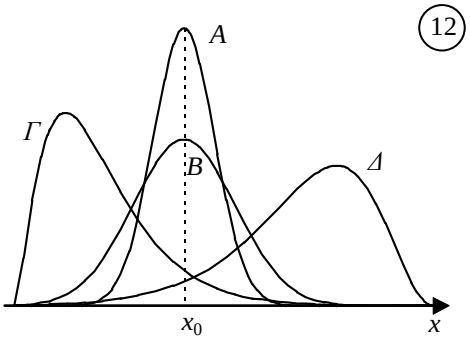
11

(α) (β)

Παρατηρούμε ότι η βαθμολογία και των δύο τμημάτων είναι συγκεντρωμένη

γύρω στο 15, αλλά το δεύτερο τμήμα παρουσιάζει μεγαλύτερη διασπορά βαθμών από το πρώτο. Δηλαδή, οι βαθμοί του Β΄ τμήματος είναι περισσότερο διασκορπισμένοι γύρω από μια "κεντρική" τιμή. Οι έννοιες "κεντρική τιμή" και "διασπορά των παρατηρήσεων" μας δίνουν το ερέθισμα για έναν ακόμα πιο σύντομο τρόπο περιγραφής της κατανομής ενός συνόλου δεδομένων. Για να ορίσουμε δηλαδή κάποια **μέτρα** (αριθμητικά μεγέθη), που να μας δίνουν α) τη θέση του "κέντρου" των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και β) τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το "κέντρο" τους. Τα πρώτα τα καλούμε **μέτρα θέσης** της κατανομής (location measures), ενώ τα δεύτερα **μέτρα διασποράς** ή **μέτρα μεταβλητότητας** (measures of variability).

Εκτός από τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής πολλές φορές είναι απαραίτητος και ο προσδιορισμός κάποιων άλλων μέτρων, που καθορίζουν τη **μορφή** της κατανομής. Κατά πόσο δηλαδή η αντίστοιχη καμπύλη συχνοτήτων είναι συμμετρική ή όχι ως προς την ευθεία $x = x_0$, για δεδομένο σημείο x_0 του άξονα $0x$. Τα μέτρα αυτά, που συνήθως εκφράζονται σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης και διασποράς, καλούνται **μέτρα ασυμμετρίας** (measures of skewness) .



Υπολογίζοντας από ένα σύνολο δεδομένων κάποια από τα ανωτέρω μέτρα, μπορούμε να έχουμε μια σύντομη περιγραφή της μορφής της καμπύλης συχνοτήτων. Στο σχήμα 12 οι καμπύλες συχνοτήτων *Α* και *Β* είναι συμμετρικές με το ίδιο "κέντρο" x_0, αλλά η *Β* έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από την *Α*. Οι καμπύλες *Γ* και *Δ* είναι ασύμμετρες, με τη *Γ* όπως λέμε να παρουσιάζει θετική ασυμμετρία και τη *Δ* αρνητική ασυμμετρία. Το "κέντρο" της *Γ* είναι αριστερότερα του x_0, ενώ της *Δ* είναι δεξιότερα του x_0. Η *Δ* παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από τη *Γ*.

Μέτρα Θέσης

Τα πιο συνηθισμένα μέτρα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης ενός συνόλου δεδομένων πάνω στον οριζόντιο άξονα ox, εκφράζοντας την "κατά μέσο όρο" απόστασή τους από την αρχή των αξόνων, είναι ο αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή (arithmetic mean or average), η διάμεσος (median) και η κορυφή ή επικρατούσα τιμή (mode).

α) Μέση Τιμή ($\bar{x}$)

Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων αποτελεί το σπουδαιότερο και χρησιμότερο μέτρο της Στατιστικής και ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων.
Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους ν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι $t_1, t_2, ..., t_\nu$, τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i \qquad (1)$$

όπου το σύμβολο $\sum_{i=1}^{\nu} t_i$ παριστάνει μια συντομογραφία του αθροίσματος $t_1 + t_2 + ... + t_\nu$ και διαβάζεται "άθροισμα των t_i από $i = 1$ έως ν". Συχνά, όταν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης, συμβολίζεται και ως $\sum t_i$ ή ακόμα πιο απλά με $\sum t$.
Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa$ αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + ... + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i \qquad (2)$$

Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$$

όπου f_i οι σχετικές συχνότητες.

Για παράδειγμα, η μέση επίδοση των μαθητών στο τμήμα A θα είναι σύμφωνα με την (1)

$$\bar{x}_A = \frac{13 + 13 + 14 + ... + 18}{10} = \frac{150}{10} = 15$$

ή ισοδύναμα από τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων σύμφωνα με την (2).

Βαθμός x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
13	2	26
14	1	14
15	4	60
16	2	32
18	1	18
Σύνολο	$v_A = 10$	$\Sigma x_i v_i = 150$

$$\bar{x}_A = \frac{\sum x_i v_i}{v_A} = \frac{150}{10} = 15 .$$

Ομοίως, υπολογίζεται και η μέση επίδοση για το τμήμα *B*, η οποία είναι πάλι

$$\bar{x}_B = 15 .$$

Επίσης, το μέσο ύψος των 40 μαθητών της Γ΄ Λυκείου του πίνακα 8, σύμφωνα με τη σχέση (1) είναι $\bar{x} = \frac{6918}{40} = 172{,}95 \text{ cm}$.

Για ευκολότερο όμως υπολογισμό χρησιμοποιούμε τον πίνακα συχνοτήτων, όπως αυτός δίνεται παρακάτω, ομαδοποιώντας τα δεδομένα σε $\kappa = 6$ κλάσεις. Αν x_i είναι το κέντρο της i κλάσης και v_i η αντίστοιχη συχνότητα, τότε σύμφωνα με τη σχέση (2) η μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{6903}{40} = 172{,}6 \text{cm}.$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μέσες τιμές του ίδιου συνόλου δεδομένων δεν είναι ακριβώς οι ίδιες. Πού οφείλεται αυτή η, έστω και μικρή, διαφορά;

Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την ομαδοποίηση υποθέσαμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες και ότι οι τιμές της μεταβλητής σε κάθε κλάση εκπροσωπούνται από την αντίστοιχη κεντρική τιμή x_i. Η υπόθεση αυτή σημαίνει απώλεια πληροφοριών για τις αρχικές τιμές. Χάνουμε λοιπόν λίγο ως προς στην ακρίβεια κερδίζουμε όμως χρόνο!

Ύψος σε cm	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
156-162	159	2	318
162-168	165	8	1320
168-174	171	12	2025
174-180	177	11	1947
180-186	183	5	915
186-192	189	2	378
	Σύνολο	$\Sigma v_i = 40$	$\Sigma x_i v_i = 6903$

β) Σταθμικός Μέσος

Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα (έμφαση) στις τιμές $x_1, x_2, ..., x_v$ ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο**

(weighted mean). Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, ..., x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, ..., w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + ... + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}.$$

Για παράδειγμα, με το νέο σύστημα, για την εισαγωγή ενός μαθητή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση θα συνυπολογίζονται ο βαθμός x_1 του απολυτηρίου του Ενιαίου Λυκείου με συντελεστή (βάρος) $w_1 = 7,5$, ο βαθμός x_2 στο τεστ δεξιοτήτων με συντελεστή $w_2 = 1$, ο βαθμός x_3 στο 1ο βασικό μάθημα με συντελεστή $w_3 = 1$ και ο βαθμός x_4 στο 2ο βασικό μάθημα με συντελεστή $w_4 = 0,5$. Εάν ένας μαθητής πάρει τους βαθμούς $x_1 = 16,5$, $x_2 = 18$, $x_3 = 17$ και $x_4 = 16,6$, τότε ο σταθμικός μέσος της επίδοσης του θα είναι:

$$\bar{x} = \frac{16,5 \times 7,5 + 18 \times 1 + 17 \times 1 + 16,6 \times 0,5}{7,5 + 1 + 1 + 0,5} = \frac{167}{10} = 16,7.$$

γ) Διάμεσος (*δ*)

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 9 μαθητές, για να λύσουν ένα πρόβλημα είναι: 3, 5, 5, 36, 6, 7, 4, 7, 8 με μέση τιμή $\bar{x} = 9$. Παρατηρούμε όμως ότι οι οκτώ από τις εννέα παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 9 και μία (ακραία τιμή), η οποία επηρεάζει και τη μέση τιμή είναι, αρκετά μεγαλύτερη του 9. Αυτό σημαίνει ότι η μέση τιμή δεν ενδείκνυται ως μέτρο θέσης (“κέντρο”) των παρατηρήσεων αυτών. Αντίθετα, ένα άλλο μέτρο θέσης που δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις είναι η **διάμεσος** (median), η οποία ορίζεται ως εξής:

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Για παράδειγμα, για να βρούμε τη διάμεσο των δεδομένων:
α) 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9
β) 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9, 9
εργαζόμαστε ως εξής:

α) Έχουμε $\nu = 13$ παρατηρήσεις, οι οποίες σε αύξουσα σειρά είναι:

0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9.

Άρα, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση (έβδομη στη σειρά), $\delta = 4$.

β) Έχουμε $\nu = 14$ παρατηρήσεις οι οποίες σε αύξουσα σειρά είναι:

0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9 9.

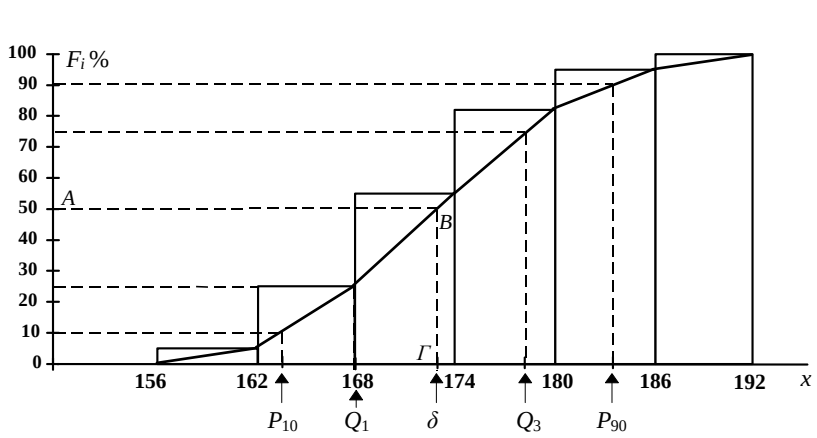
Άρα, η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων (της έβδομης και όγδοης στη σειρά), δηλαδή $\delta = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

Παρατηρούμε ότι, η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Διάμεσος σε Ομαδοποιημένα Δεδομένα

Θεωρούμε τα δεδομένα του ύψους των μαθητών στον πίνακα 9 και το αντίστοιχο ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων με την πολυγωνική γραμμή, σχήμα 13. Η διάμεσος, όπως ορίστηκε, αντιστοιχεί στην τιμή $x = \delta$ της μεταβλητής X (στον οριζόντιο άξονα), έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες του δ. Δηλαδή, η διάμεσος θα έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i = 50\%$. Εφόσον στον κάθετο άξονα έχουμε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες, από το σημείο Α (50% των παρατηρήσεων) φέρουμε την $AB // 0x$ και στη συνέχεια τη $B\Gamma \perp 0x$. Τότε, στο σημείο Γ αντιστοιχεί η διάμεσος δ των παρατηρήσεων. Δηλαδή, $\delta \approx 173$.

13



δ) Εκατοστημόρια (P_κ)

Όπως ορίσαμε τη διάμεσο *δ*, έτσι ώστε το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες του *δ* και το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μεγαλύτερες του *δ*, μπορούμε ανάλογα να ορίσουμε και τα **εκατοστημόρια** (percentiles) P_κ, $\kappa = 1,2,...,99$. Οι τιμές $P_1, P_2,..., P_{99}$ χωρίζουν τη συνολική συχνότητα σε 100 ίσα μέρη. Επομένως, αναλόγως και με τον ορισμό της διαμέσου, ορίζουμε ως *κ*-εκατοστιαίο σημείο ή P_κ εκατοστημόριο ενός συνόλου παρατηρήσεων την τιμή εκείνη για την οποία το πολύ *κ*% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του P_κ και το πολύ (100-*κ*)% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Ειδική περίπτωση εκατοστημορίων είναι τα P_{25}, P_{50}, P_{75}, τα οποία καλούνται **τεταρτημόρια** (quartiles) και συμβολίζονται με Q_1, Q_2 και Q_3, αντίστοιχα. Για το Q_1 έχουμε αριστερά το πολύ 25% των παρατηρήσεων και δεξιά το πολύ 75%. Όμοια για το Q_3 έχουμε αριστερά το πολύ 75% των παρατηρήσεων και δεξιά το πολύ 25% των παρατηρήσεων. Προφανώς το $Q_2 = P_{50}$ συμπίπτει και με τη διάμεσο, δηλαδή $Q_2 = \delta$. Τα μέτρα αυτά χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά για τη μελέτη ενός συνόλου δεδομένων.
Συχνά για ευκολία ο υπολογισμός των τεταρτημορίων Q_1 και Q_3 ενός συνόλου δεδομένων γίνεται κατά προσέγγιση υπολογίζοντας τις διαμέσους του πρώτου και του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, προκειμένου να υπολογίσουμε τα τεταρτημόρια των δεδομένων 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9, εργαζόμαστε ως εξής:

- Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά μεγέθους:

Έχουμε $\nu = 13$ παρατηρήσεις, οι οποίες σε αύξουσα σειρά είναι:

0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9.

- Υπολογίζουμε τη διάμεσο, όπως προαναφέραμε:

Η διάμεσος είναι η έβδομη στη σειρά παρατήρηση, δηλαδή $\delta = 4$.

- Υπολογίζουμε τη διάμεσο του πρώτου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή των παρατηρήσεων που είναι αριστερά του *δ*. Η τιμή αυτή είναι το Q_1:

Η διάμεσος των παρατηρήσεων που είναι αριστερά του *δ*, δηλαδή των 0 1 1 1 2 3, είναι το $Q_1 = \frac{1+1}{2} = 1$.

- Υπολογίζουμε τη διάμεσο του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, δηλαδή των παρατηρήσεων που είναι δεξιά του *δ*. Η τιμή αυτή είναι το Q_3.

Η διάμεσος των παρατηρήσεων που είναι δεξιά του δ, δηλαδή των 5 6 6 8 8 9, είναι το $Q_3 = \dfrac{6+8}{2} = 7$.

Εκατοστημόρια σε Ομαδοποιημένα Δεδομένα

Ο υπολογισμός των εκατοστημορίων (ή τεταρτημορίων) σε ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται όπως και στη διάμεσο από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. Στο σχήμα 13 δίνονται τα Q_1, $Q_2 = \delta$, Q_3 και P_{10}, P_{90} για τα δεδομένα του πίνακα 9, από το οποίο βρίσκουμε κατά προσέγγιση:

$$P_{10} = 162{,}5\,, \quad Q_1 = 168\,, \quad \delta = 173\,, \quad Q_3 = 178 \quad \text{και} \quad P_{90} = 184\,.$$

ε) Επικρατούσα Τιμή (M_0)

Στην περίπτωση μη ομαδοποιημένων δεδομένων **επικρατούσα τιμή** ή **κορυφή** (mode) $\boldsymbol{M_0}$ ορίζεται ως η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Είναι προφανές ότι η επικρατούσα τιμή μπορεί να οριστεί και στην περίπτωση ποιοτικών δεδομένων, ενώ τα άλλα μέτρα που είδαμε ορίζονται μόνο για ποσοτικά δεδομένα. Για παράδειγμα:

α) Η επικρατούσα τιμή (επικρατούσα απασχόληση) για την απασχόληση των μαθητών του πίνακα 5 στον ελεύθερο χρόνο τους είναι $M_0 = $"Μουσική" .

β) Η επικρατούσα τιμή του αριθμού των αδελφών των μαθητών στον πίνακα 6 είναι $M_0 = 1$, δηλαδή οι περισσότερες οικογένειες (55%) έχουν δύο παιδιά..

γ) Για να βρούμε την επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων 0 1 1 2 2 2 3 4 4 4 5 5 7 8, κατασκευάζουμε το διπλανό πίνακα συχνοτήτων. Οι τιμές 2 και 4 είναι και οι δύο επικρατούσες τιμές, γιατί καθεμιά έχει συχνότητα 3. Βλέπουμε εδώ ότι η επικρατούσα τιμή μπορεί να μην είναι μοναδική. Όταν έχουμε δύο κορυφές, η αντίστοιχη κατανομή συχνοτήτων λέγεται **δικόρυφη** (bimodal), ενώ όταν έχουμε πολλές κορυφές λέγεται **πολυκόρυφη** (multimodal).

x_i	v_i
0	1
1	2
2	3
3	1
4	3
5	2
7	1
8	1

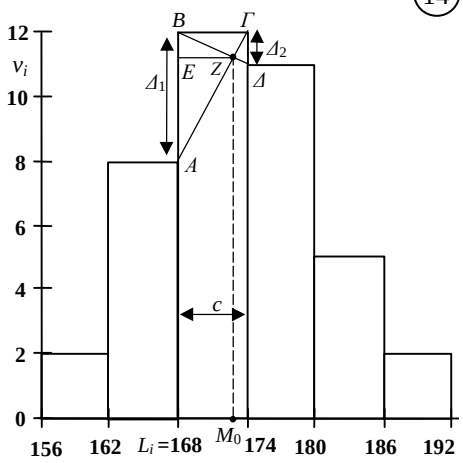
δ) Όταν όλες οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή. Έτσι, για τις παρατηρήσεις 0, 1, 2, 7, 8, 9 δεν έχουμε επικρατούσα τιμή.

Επικρατούσα Τιμή σε Ομαδοποιημένα Δεδομένα

Όταν έχουμε ομαδοποιημένα (ποσοτικά) δεδομένα σε **ισοπλατείς** κλάσεις, τότε βρίσκουμε πρώτα την **επικρατούσα κλάση** i , δηλαδή την κλάση με τη μεγαλύτερη συχνότητα.

Υποθέτοντας, όπως έχουμε ήδη αναφέρει και προηγουμένως, ότι οι παρατηρήσεις στις κλάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα, η επικρατούσα τιμή προσδιορίζεται, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα 14, ως η τετμημένη του σημείου τομής Z των ευθύγραμμων τμημάτων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Στο σχήμα αυτό δίνεται η κορυφή για το ύψος των μαθητών του πίνακα 9. Κατά προσέγγιση η κορυφή (επικρατέστερο ύψος) είναι $M_0 \approx 173$ cm.

14



Μέτρα Διασποράς

Στα προηγούμενα είδαμε ότι τα μέτρα θέσης παρέχουν κάποια πληροφορία για την κατανομή ενός πληθυσμού. Αυτά όμως δεν επαρκούν, για να περιγράψουν πλήρως την κατανομή, όπως διαπιστώσαμε στην αρχή της § 2.3 συγκρίνοντας τις βαθμολογίες των μαθητών δύο τμημάτων Α και Β στα σχήματα 11(α), (β).

Ενώ οι βαθμολογίες των δύο τμημάτων A και B έχουν ίσες μέσες τιμές $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$ και ίσες διαμέσους $\delta_A = \delta_B = 15$, είναι φανερό ότι οι κατανομές τους διαφέρουν σημαντικά ως προς τη μεταβλητότητά τους. Οι βαθμοί του τμήματος Α είναι περισσότερο "συγκεντρωμένοι" γύρω από τη μέση τιμή, ενώ, αντίθετα, οι βαθμοί του τμήματος Β διασπείρονται περισσότερο, έχουν δηλαδή μεγάλες αποκλίσεις γύρω από τη μέση τιμή τους.

Παράλληλα λοιπόν με τα μέτρα θέσης κρίνεται απαραίτητη και η εξέταση κάποιων μέτρων διασποράς ή μεταβλητότητας, δηλαδή μέτρων που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. Τέτοια μέτρα λέγονται **μέτρα διασποράς** (measures of variation, dispersion measures). Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

α) Εύρος (*R*)

Το απλούστερο από τα μέτρα διασποράς είναι το **εύρος** ή **κύμανση** (range) (R), που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή:

Εύρος $R =$ Μεγαλύτερη παρατήρηση-Μικρότερη παρατήρηση

Έτσι, για τη βαθμολογία του τμήματος Α το εύρος είναι $R_A = 18 - 13 = 5$, ενώ για το τμήμα Β, $R_B = 20 - 10 = 10$, τιμές που επιβεβαιώνουν ότι πράγματι στο τμήμα Β έχουμε μεγαλύτερη διασπορά βαθμολογίας παρά στο τμήμα Α.
Όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος δίνεται από τη διαφορά του κατώτερου ορίου της πρώτης κλάσης από το ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσης. Το εύρος των υψών των μαθητών του δείγματος στον πίνακα 9 είναι $R = 192 - 156 = 36$. Προφανώς, το εύρος σε ομαδοποιημένα δεδομένα μπορεί να διαφέρει ελαφρώς από τα αντίστοιχα δεδομένα πριν αυτά ομαδοποιηθούν. Για παράδειγμα, το εύρος των υψών στον πίνακα 8, πριν αυτά ομαδοποιηθούν, βρήκαμε ότι είναι $R = 191 - 156 = 35$.
Το εύρος είναι ένα αρκετά απλό μέτρο, που υπολογίζεται εύκολα δε θεωρείται όμως αξιόπιστο μέτρο διασποράς, γιατί βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.

β) Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος (Q)

Το **ενδοτεταρτημοριακό εύρος** (interquartile range) είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3, δηλαδή:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

Στο μεταξύ τους διάστημα περιλαμβάνεται το 50% των παρατηρήσεων. Επομένως όσο μικρότερο είναι αυτό το διάστημα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η συγκέντρωση των τιμών και άρα μικρότερη η διασπορά των τιμών της μεταβλητής.
Από τα δεδομένα του σχήματος 13 βρήκαμε κατά προσέγγιση $Q_1 = 168$, $Q_3 = 178$ επομένως το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = 10$. Δηλαδή το 50% των μαθητών έχουν ύψος μεταξύ 168 και 178 cm.

γ) Διακύμανση (s^2)

Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε τη διασπορά των παρατηρήσεων $t_1, t_2, ..., t_v$ μιας μεταβλητής X θα ήταν να αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση και να βρούμε τον αριθμητικό μέσο των διαφορών αυτών, δηλαδή τον αριθμό:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + ... + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{v}(t_i - \bar{x})}{v}.$$

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + ... + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

Γι'αυτό, ως ένα μέτρο διασποράς παίρνουμε τον μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$. Το μέτρο αυτό καλείται **διακύμανση** ή **διασπορά** (variance) και ορίζεται από τη σχέση

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}(t_i - \bar{x})^2} \qquad (1)$$

Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται ότι μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή:

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{v} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{v} t_i\right)^2}{v}\right\}} \qquad (2)$$

η οποία διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς κυρίως όταν η μέση τιμή $\bar{x}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός.
Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα, η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 v_i} \qquad (3)$$

ή την ισοδύναμη μορφή:

(4)

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i\right)^2}{v}\right\}.$$

όπου $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές της μεταβλητής (ή τα κέντρα των κλάσεων) με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, ..., v_\kappa$.

Για παράδειγμα, η διακύμανση της βαθμολογίας των μαθητών του τμήματος Α είναι σύμφωνα με την (1)

$$s_A^2 = \frac{(13-15)^2 + (13-15)^2 + (14-15)^2 + ... + (18-15)^2}{10} = \frac{20}{10} = 2,$$

ενώ για τους μαθητές του τμήματος Β βρίσκουμε $s_B^2 = 6{,}6$, που επιβεβαιώνει τη διαπίστωσή μας ότι η βαθμολογία των μαθητών του τμήματος *B* παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από τη βαθμολογία των μαθητών του τμήματος *A*.

Ομοίως, η διακύμανση του ύψους των μαθητών για τα ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 9, υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο (3), όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	x_i^2	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
156-162	159	2	25281	318	50562
162-168	165	8	27225	1320	217800
168-174	171	12	29241	2052	350892
174-180	177	11	31329	1942	344619
180-186	183	5	33489	915	167445
186-192	189	2	35721	378	71442
Σύνολο:		$v = 40$	—	$\Sigma x_i v_i =$ 6930	$\Sigma x_i^2 v_i =$ 1202760

Επομένως:

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{1}{40}\left\{1202776 - \frac{6930^2}{40}\right\} = 53{,}4$$

Εάν υπολογίσουμε τη διακύμανση από τα μη ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 8, βρίσκουμε $s^2 = 50{,}9$. Η διαφορά αυτή οφείλεται στην απώλεια πληροφορίας λόγω ομαδοποίησης των παρατηρήσεων.

δ) Τυπική Απόκλιση (s)

Η διακύμανση είναι μια αξιόπιστη παράμετρος διασποράς, αλλά έχει ένα μειονέκτημα. Δεν εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. Για παράδειγμα, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm, η διακύμανση εκφράζεται σε cm^2. Αν όμως πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, θα έχουμε ένα μέτρο διασποράς που θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού, όπως ακριβώς είναι και όλα τα άλλα μέτρα θέσης, που εξετάσαμε έως τώρα. Η ποσότητα αυτή λέγεται **τυπική απόκλιση** (standard deviation), συμβολίζεται με *s* και δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{s = \sqrt{s^2}}$$

Η τυπική απόκλιση για το ύψος των μαθητών του πίνακα 4 είναι από το προηγούμενο παράδειγμα $s = \sqrt{53{,}4} = 7{,}3\ \text{cm}$, αν αυτή υπολογιστεί από τα ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 9, ή $s = \sqrt{50{,}9} = 7{,}13\ \text{cm}$, αν υπολογιστεί από τα μη ομαδοποιημένα δεδομένα του πίνακα 8.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

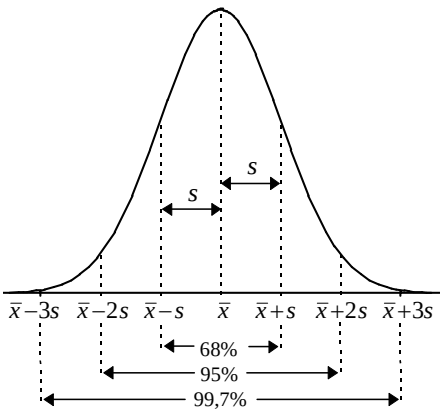
15

i) το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα
$$(\bar{x} - s,\ \bar{x} + s)$$

ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα
$$(\bar{x} - 2s,\ \bar{x} + 2s)$$

iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα
$$(\bar{x} - 3s,\ \bar{x} + 3s)$$

iv) το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.



Συντελεστής Μεταβολής (CV)

Έστω ότι από ένα δείγμα είκοσι μαθητών της Α΄ Γυμνασίου βρήκαμε μέσο βάρος $\bar{x}_A = 40\,\text{kgr}$ και τυπική απόκλιση $s_A = 6\,\text{kgr}$, ενώ από ένα δεύτερο δείγμα τριάντα μαθητών της Γ΄ Λυκείου βρήκαμε μέσο βάρος $\bar{x}_B = 75\,\text{kgr}$ και τυπική απόκλιση $s_B = 6\,\text{kgr}$. Όπως αντιλαμβανόμαστε, είναι λάθος να πούμε ότι το βάρος των μαθητών του Λυκείου έχει τον ίδιο βαθμό μεταβλητότητας με το βάρος των μαθητών του Γυμνασίου, καθόσον η βαρύτητα που έχουν τα 6 kgr στο μέσο βάρος των 40 kgr είναι διαφορετική από αυτήν που έχουν στο μέσο βάρος των 75 kgr.

Ακόμη, ας υποθέσουμε ότι ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας Α είναι $\bar{x}_A = 250.000$ δρχ. με τυπική απόκλιση $s_A = 42.000$ δρχ., ενώ για τους υπαλλήλους μιας εταιρείας Β είναι $\bar{x}_B = \$1.400$ με τυπική απόκλιση $s_B = \$350$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης του μισθού, επομένως οι διασπορές των παρατηρήσεων δεν είναι άμεσα συγκρίσιμες.

Ένα μέτρο με το οποίο μπορούμε να ξεπεράσουμε τις παραπάνω δυσκολίες και το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο **συντελεστής μεταβολής** ή **συντελεστής μεταβλητότητας** (coefficient of variation), ο οποίος ορίζεται από το λόγο:

$$\boxed{CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} \cdot 100\% = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%.}$$

Ο συντελεστής μεταβολής εκφράζεται επί τοις εκατό, είναι συνεπώς ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης και παριστάνει ένα μέτρο **σχετικής διασποράς** των τιμών και όχι της απόλυτης διασποράς, όπως έχουμε δει έως τώρα. Εκφράζει, δηλαδή, τη μεταβλητότητα των δεδομένων απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής. Για το πρώτο παράδειγμα του βάρους έχουμε συντελεστή μεταβολής για τις δύο ομάδες μαθητών:

$$CV_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A} \cdot 100\% = \frac{6}{40} \cdot 100\% = 15\% \quad \text{και}$$

$$CV_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} \cdot 100\% = \frac{6}{75} \cdot 100\% = 8\%$$

δηλαδή, ο βαθμός διασποράς του βάρους των μαθητών Γυμνασίου είναι μεγαλύτερος από το βαθμό διασποράς του βάρους των μαθητών Λυκείου (για

τα συγκεκριμένα δείγματα).
Ανάλογα συμπεράσματα βγάζουμε και για το δεύτερο παράδειγμα, όπου βρίσκουμε $CV_A = 12\%$ και $CV_B = 25\%$. Παρ'όλο που η τυπική απόκλιση των μισθών στην εταιρεία Α είναι μεγαλύτερη από την τυπική απόκλιση στην εταιρεία Β, ο συντελεστής μεταβολής δίνει μεγαλύτερη σχετική διασπορά στην εταιρεία Β. Αυτό μεταφράζεται στο να λέμε ότι έχουμε μεγαλύτερη **ομοιογένεια** μισθών στην εταιρεία Α παρά στη Β.
Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ο διπλανός πίνακας συχνοτήτων δίνει την κατανομή του χρόνου *X* (σε sec) 60 μαθητών που χρειάστηκαν, για να τρέξουν μια δεδομένη απόσταση. Να υπολογιστούν:

α) ο μέσος, ο διάμεσος και ο επικρατέστερος χρόνος για την κάλυψη της συγκεκριμένης απόστασης,
β) η τυπική απόκλιση,
γ) σε πόσο χρόνο από της στιγμή της εκκίνησης κάλυψε την απόσταση το 25% των μαθητών.

x_i	v_i
50	**4**
55	**6**
60	**8**
65	**12**
70	**14**
75	**10**
80	**6**

ΛΥΣΗ

α) • Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής συμπληρώνουμε τις τρεις πρώτες στήλες του παρακάτω πίνακα:

x_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
50	4	200	10000
55	6	330	18150
60	8	480	28800
65	12	780	50700
70	14	980	68600
75	10	750	56250
80	6	480	38400
Σύνολο	v=60	$\Sigma x_i v_i$ =4000	$\Sigma x_i^2 v_i$ =270900

Επομένως, ο μέσος χρόνος για την κάλυψη της συγκεκριμένης απόστασης είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{4000}{60} \approx 66{,}67 \text{ sec.}$$

• Έχουμε $v = 60$ παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά, άρα η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 30ής και 31ης παρατήρησης, δηλαδή ο μέσος όρος των παρατηρήσεων 65 και 70, άρα $\delta = \frac{65+70}{2} = 67{,}5 \text{ sec}$.

• Η επικρατούσα τιμή είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, άρα $M_0 = 70 \text{ sec}$.

β) Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης είναι προτιμότερο να εφαρμόσουμε τη σχέση (4), μιας και η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος αριθμός. Με βάση τον παραπάνω πίνακα η διακύμανση της μεταβλητής X είναι:

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{1}{60}\left\{270900 - \frac{4000^2}{60}\right\} = 70{,}56 \text{ sec}^2$$

και η τυπική απόκλιση $s = \sqrt{70{,}56} = 8{,}4 \text{ sec}$.

γ) Θέλουμε να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο, Q_1. Αριστερά της διαμέσου $\delta = 67{,}5$ έχουμε 30 παρατηρήσεις. Η διάμεσος αυτών των 30 πρώτων παρατηρήσεων είναι το ημιάθροισμα της 15ης και 16ης παρατήρησης, δηλαδή $Q_1 = (60+60)/2 = 60 \text{ sec}$. Δηλαδή, ύστερα από μία ώρα από τη στιγμή της εκκίνησης το 25% των μαθητών κάλυψαν τη συγκεκριμένη απόσταση.

2. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση

$$\boldsymbol{f(\lambda) = \sum_{i=1}^{v}(x_i - \lambda)^2 = (x_1 - \lambda)^2 + (x_2 - \lambda)^2 + \ldots + (x_v - \lambda)^2}$$

γίνεται ελάχιστη, όταν $\lambda = \bar{x}$.

ΛΥΣΗ

Λαμβάνοντας την πρώτη παράγωγο της $f(\lambda)$, βρίσκουμε

$$f'(\lambda) = -2(x_1 - \lambda) - 2(x_2 - \lambda) \ldots - 2(x_v - \lambda).$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(\lambda) = 0$$

$$x_1 - \lambda + x_2 - \lambda + \ldots + x_v - \lambda = 0$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_v - v\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_v}{v} = \bar{x}.$$

Η δεύτερη παράγωγος της $f(\lambda)$ είναι:

$$f''(\lambda) = \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{v} = 2v$$

και επειδή $f''(\bar{x}) = 2v > 0$, συνεπάγεται ότι για $\lambda = \bar{x}$ η $f(\lambda)$ γίνεται ελάχιστη.

3. **Έστω $x_1, x_2, ..., x_v$ v παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x.**

α) Αν $y_1, y_2, ..., y_v$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν προσθέσουμε σε καθεμιά από τις $x_1, x_2, ..., x_v$ μια σταθερά *c*, να δειχτεί ότι:

i) $\bar{y} = \bar{x} + c$, **ii) $s_y = s_x$**

β) Αν $y_1, y_2, ..., y_v$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $x_1, x_2, ..., x_v$ επί μια σταθερά *c*, να αποδειχτεί ότι:

i) $\bar{y} = c\,\bar{x}$, **ii) $s_y = |c|\, s_x$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) Έχουμε $y_i = x_i + c$, $i = 1,2,...,v$, επομένως:

i) $$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_v}{v} = \frac{x_1 + c + x_2 + c + ... + x_v + c}{v}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_v}{v} + \frac{vc}{v} = \bar{x} + c$$

ii) $$s_y^2 = \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + ... + (y_v - \bar{y})^2}{v}$$
$$= \frac{(x_1 + c - \bar{x} - c)^2 + (x_2 + c - \bar{x} - c)^2 + ... + (x_v + c - \bar{x} - c)^2}{v}$$
$$= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_v - \bar{x})^2}{v} = s_x^2.$$

Άρα και $s_y = s_x$.

β) Έχουμε $y_i = cx_i$, $i = 1,2,...,v$, επομένως:

i) $$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_v}{v} = \frac{cx_1 + cx_2 + ... + cx_v}{v} = c\frac{x_1 + x_2 + ... + x_v}{v} = c\bar{x}$$

ii) $$s_y^2 = \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + ... + (y_v - \bar{y})^2}{v}$$
$$= \frac{(cx_1 - c\bar{x})^2 + (cx_2 - c\bar{x})^2 + ... + (cx_v - c\bar{x})^2}{v}$$
$$= \frac{c^2[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_v - \bar{x})^2]}{v} = c^2 s_x^2.$$

Άρα και $s_y = |c|\, s_x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έξι διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί έχουν μέση τιμή 15. Να βρείτε τους αριθμούς και τη διάμεσό τους.

2. Έχουμε ένα δείγμα $\nu = 10$ παρατηρήσεων, όπου κάθε παρατήρηση μπορεί να είναι 1, 2 ή 3. Είναι δυνατό η μέση τιμή να είναι α) 1 β) 4 γ) 1,8;

3. Ένας επενδυτής επένδυσε το ίδιο ποσό χρημάτων σε 8 διαφορετικές μετοχές στο χρηματιστήριο. Κατά τη διάρκεια του περασμένου έτους οι μετοχές είχαν τις παρακάτω εκατοστιαίες μεταβολές στην αξία τους:
5, 16, -10, 0, 27, 14, -20, 34. Να βρεθεί η μέση εκατοστιαία απόδοση της επένδυσης.

4. Το μέσο ύψος 9 καλαθοσφαιριστών μιας ομάδας είναι 205 cm.

α) Για να "ψηλώσει" την ομάδα ο προπονητής πήρε έναν ακόμη παίκτη με ύψος 216 cm. Ποιο είναι το μέσο ύψος της ομάδας τώρα;

β) Εάν ήθελε να "ψηλώσει" την ομάδα στα 208 cm, πόσο ύψος έπρεπε να έχει ο καλαθοσφαιριστής που πήρε;

5. Η μέση ηλικία 18 αγοριών και 12 κοριτσιών μιας τάξης είναι 15,4 χρόνια. Εάν η μέση ηλικία των αγοριών είναι 15,8 χρόνια, να βρείτε τη μέση ηλικία των κοριτσιών.

6. Σε μια κάλπη υπάρχουν άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες σε αναλογία 10%, 20%, 30% και 40% αντίστοιχα. Μια άσπρη μπάλα έχει βάρος 10 gr., μια μαύρη 11 gr, μια κόκκινη 12 gr και μια πράσινη 13 gr Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή του βάρους όλων των μπαλών, αν ξέρουμε ότι στην κάλπη υπάρχουν α) 10 μπάλες, β) 20 μπάλες γ) δε γνωρίζουμε πόσες μπάλες υπάρχουν στην κάλπη.

7. Η επίδοση ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι 12, 10, 16, 18, 14.

α) Να βρείτε τη μέση επίδοση.

β) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 3, 1, 1 και 3, ποια θα ήταν η μέση επίδοση; Σε ποια μαθήματα έπρεπε να δώσει ιδιαίτερη προσοχή ο μαθητής;

8. Ένα εργοστάσιο απασχολεί 5 υπαλλήλους στο Τμήμα Α με μέσο (μηνιαίο) μισθό 249 χιλ. δρχ., 6 υπαλλήλους στο Τμήμα Β με μέσο μισθό 280 χιλ. δρχ. και 4 υπαλλήλους στο Τμήμα Γ με μέσο μισθό 360 χιλ. δρχ. Ποιος

είναι ο μέσος μισθός όλων των υπαλλήλων;

9. Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 6. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 5, 8, 9. Να βρείτε τους άλλους δύο.

10. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Η πέμπτη συχνότητα χάθηκε! Μπορείτε να την "ανακαλύψετε", εάν γνωρίζετε ότι
α) η μέση τιμή είναι 4,4,
β) η διάμεσος είναι το 4,5,
γ) υπάρχουν δύο επικρατούσες τιμές;

x_i	ν_i
2	1
3	3
4	1
5	2
6	;
7	1

11. Για την κατανομή του βαθμού των Μαθηματικών της Β΄ τάξης των 40 μαθητών και μαθητριών της Γ΄ Λυκείου του πίνακα 4 να βρείτε:
α) τη μέση τιμή,
β) τη διάμεσο,
γ) την επικρατούσα τιμή,
δ) το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

12. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό των επισκέψεων 40 μαθητών σε διάφορα μουσεία της χώρας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Επισκέψεις	Συχνότητα
[0-2)	8
2-4	12
4-6	10
6-8	6
8-10	4

Να υπολογιστούν:
α) η μέση τιμή,
β) η επικρατούσα τιμή,
γ) η διάμεσος,
δ) το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.

13. Το μέσο ύψος των 30 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι 170 cm. Ποιο θα είναι το μέσο ύψος της τάξης:
α) αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 180 cm,
β) αν έρθει μια νέα μαθήτρια με ύψος 170 cm,
γ) αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 180 cm και έλθει μια μαθήτρια με ύψος 170 cm;

14. Καθεμία από τις παρακάτω λίστες δεδομένων έχουν μέση τιμή 50.
α) Σε ποια λίστα υπάρχει (i) μεγαλύτερη (ii) μικρότερη διασπορά παρατηρήσεων; (Να μη γίνουν πράξεις).

0, 20, 40, 50, 60, 80, 100
0, 48, 49, 50, 51, 52, 100
0, 1, 2, 50, 98, 99, 100.

β) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση των δεδομένων αυτών το εύρος;

15. Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν: 7, 11, 10, 13, 15, 3, 12, 11, 4, 14. Να υπολογίσετε:

α) τη μέση τιμή, την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο,
β) τα Q_1, και Q_3,
γ) το εύρος, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

16. Να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση των δεδομένων της άσκησης 12.

17. Ο μέσος χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε το πρωί από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο είναι 10 λεπτά με τυπική απόκλιση 2 λεπτά. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται:

α) κάτω από 8 λεπτά
β) πάνω από 14 λεπτά
γ) το πολύ 10 λεπτά
δ) από 6 έως 12 λεπτά
για να πάνε στο σχολείο τους.

18. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο για τα παρακάτω δείγματα δεδομένων και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα:

α) 1 2 6 β) 2 4 12
γ) 11 12 16 δ) 12 14 22.

19. Να υπολογίσετε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση για καθεμιά από τις παρακάτω λίστες δεδομένων. Συγκρίνοντας τα δεδομένα και τα αποτελέσματα τι συμπέρασμα βγάζετε;

α) 1, 3, 4, 5, 7
β) 3, 9, 12, 15, 21
γ) 6, 8, 9, 10, 12
δ) -1, -3, -4, -5, -7.

20. Οι μαθητές του Γ2 ξόδεψαν σε μια μέρα κατά μέσο όρο 625 δρχ. αγοράζοντας διάφορα τρόφιμα από το κυλικείο του σχολείου. Εάν ο συντελεστής μεταβολής είναι 27,2%, να βρείτε την τυπική απόκλιση. Εάν επιπλέον γνωρίζετε ότι το $\sum x_i^2 = 11.746.700$, πόσοι είναι οι μαθητές του Γ2;

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η βαθμολογία 50 μαθητών στην Ιστορία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20 (κανένας δεν είναι κάτω από τη βάση). Γνωρίζουμε επίσης ότι πέντε μαθητές έχουν βαθμό κάτω από 12, δεκαπέντε κάτω από 14, πέντε μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαπέντε μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

α) Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.

β) Να υπολογίσετε: i) τη μέση τιμή, ii) τη διάμεσο.
γ) Εάν στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση δοθεί έπαινος, πόσο βαθμό πρέπει να έχει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο;

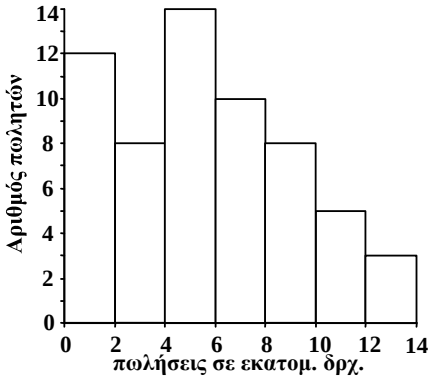
2. Η μέση τιμή και η διακύμανση των 5 τιμών ενός δείγματος είναι $\bar{x} = 4$ και $s^2 = 10$, αντίστοιχα. Εάν, για τις τέσσερις τιμές ισχύει $\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 = 14$, να βρεθεί η πέμπτη τιμή.

3. Ένας μαθητής αγόρασε 10 βιβλία που κόστιζαν χωρίς ΦΠΑ 5, 3, 2, 6, 7, 2, 3, 9, 3, 4 χιλ. δρχ., αντίστοιχα.

α) Ποια είναι η μέση, η διάμεση και η επικρατούσα αξία (τιμή) των βιβλίων;
β) Πώς μεταβάλλονται τα ευρήματα του ερωτηματος (α), αν προσθέσουμε και το ΦΠΑ, που είναι 18%;
γ) Αν ο μαθητής πληρώσει επί πλέον 100 δρχ. (χωρίς ΦΠΑ) για κάθε βιβλίο που θα "ντύσει", πώς διαμορφώνονται τώρα τα ευρήματα του ερωτήματος (β);

4. Να δείξετε ότι εάν από όλες τις τιμές 0, 2, 4, 6, 8, 10 και 12 ενός δείγματος αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους και διαιρέσουμε με την τυπική τους απόκλιση, τότε εκείνες μετασχηματίζονται σε άλλες τιμές με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Να δείξετε ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει για όλα τα δυνατά δείγματα.

5. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα ύψη των πωλήσεων σε εκατομμύρια δρχ. που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



α) Πόσοι είναι οι πωλητές;
β) Πόσοι πωλητές έκαναν πωλήσεις πάνω από 5 εκατομμύρια δρχ.;
γ) Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή των πωλήσεων.
δ) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανση.
ε) Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων να εκτιμήσετε τα τρία τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3.

6. Στο διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή της ηλικίας των ατόμων μιας πόλης. Να υπολογίσετε:

α) Την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

β) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Ηλικία (σε έτη)	Συχνότητα (σε χιλιάδες)
0-20	12
20-40	14
40-60	20
60-80	10
80-100	4

7. Από τη Στατιστική της Φυσικής Κίνησης Πληθυσμού της Ελλάδας οι θάνατοι λόγω υπερτασικής νόσου το 1995 δίνονται στον διπλανό πίνακα (ΕΣΥΕ):

Να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για την ηλικία ανδρών και γυναικών, αντίστοιχα, που πέθαναν από υπερτασική νόσο το 1995, και στη συνέχεια να τα συγκρίνετε.

	Θάνατοι	
Ηλικία	Άνδρες	Γυναίκες
50-54	10	7
55-59	10	4
60-64	17	21
65-69	36	57
70-74	44	61
75-79	73	109
80-84	117	162
85-89	123	195

2.4 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

Εισαγωγή

Στα διάφορα προβλήματα που εξετάσαμε έως τώρα στη Στατιστική ασχοληθήκαμε κάθε φορά με μία μόνο μεταβλητή (ξεχωριστά), π.χ. με το βάρος, με το ύψος, με την επίδοση μαθητών κτλ. Για καθεμιά μεμονωμένη μεταβλητή αρκεστήκαμε στη μελέτη της κατανομής συχνοτήτων, στον υπολογισμό διάφορων μέτρων όπως μέση τιμή, διάμεσος, διακύμανση κτλ. Σε αρκετές όμως περιπτώσεις εξίσου ενδιαφέρουσα είναι και η ταυτόχρονη μελέτη δύο ή περισσότερων μεταβλητών, για να προσδιορίσουμε με ποιο τρόπο οι μεταβλητές αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα:

α) Η ηλικία και το βάρος ενός παιδιού έχουν κάποια θετική εξάρτηση (συσχέτιση) μεταξύ τους με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλο είναι το παιδί τόσο μεγαλύτερο βάρος θα έχει.

β) Η διάρκεια ζωής των ζώντων οργανισμών σε μια περιοχή και το ποσοστό μόλυνσης της περιοχής έχουν αρνητική εξάρτηση μεταξύ τους, με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλο είναι το ποσοστό μόλυνσης της περιοχής τόσο μικρότερη είναι η διάρκεια ζωής των οργανισμών που ζουν στην περιοχή.

γ) Όσο μεγαλύτερη (μέχρι ένα ανώτερο όριο) είναι η περιεκτικότητα σε φθόριο στο πόσιμο νερό, τόσο μικρότερες είναι οι περιπτώσεις στη φθορά των δοντιών των μικρών παιδιών.
δ) Η συνολική παραγωγή καλαμποκιού εξαρτάται από τη θέση του χωραφιού, από την ποσότητα λιπάσματος, από την επίδραση της θερμοκρασίας, της υγρασίας κτλ.
ε) Το ύψος των αποδοχών των υπαλλήλων μιας εταιρείας δεν εξαρτάται από το βάρος τους.

Έτσι λοιπόν είναι ενδιαφέρον να εξεταστούν οι επιδράσεις που κάποιες μεταβλητές ασκούν σε κάποιες άλλες μεταβλητές. Η ύπαρξη μιας συναρτησιακής σχέσης (εξίσωσης) μεταξύ των μεταβλητών μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύτιμη για την πρόβλεψη των τιμών μιας μεταβλητής από τις γνώσεις που διαθέτουμε για τις άλλες μεταβλητές, όταν ισχύουν κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες.

Ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη μιας απ'αυτές μέσω των άλλων χαρακτηρίζεται με την ονομασία **ανάλυση παλινδρόμησης** (regression analysis). Ιστορικά, ο όρος "regression" χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Άγγλο ανθρωπολόγο Galton (1822-1911) το 1885. Με τη μελέτη του ύψους των παιδιών σε σχέση με το ύψος των γονέων διαπιστώθηκε ότι παιδιά ψηλών γονέων τείνουν, κατά μέσο όρο, να είναι κοντύτερα των γονιών τους, ενώ παιδιά κοντών γονέων τείνουν, κατά μέσο όρο, να γίνονται ψηλότερα των γονιών τους.

Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση

Η απλούστερη περίπτωση παλινδρόμησης είναι η απλή γραμμική παλινδρόμηση (simple linear regression), κατά την οποία υπάρχει μόνο μια **ανεξάρτητη μεταβλητή** X (independent or input variable), και η **εξαρτημένη μεταβλητή** Y (dependent or response variable), η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μία γραμμική συνάρτηση του X. Η περίπτωση αυτή εμφανίζεται τόσο σε πειραματικές όσο και σε μη πειραματικές μελέτες. Στις πειραματικές μελέτες ο ερευνητής καθορίζει, για παράδειγμα, από πριν τις δόσεις ενός φαρμάκου (ανεξάρτητη μεταβλητή) που δίνει στα πειραματόζωα και μετρά τις αντιδράσεις τους (εξαρτημένη μεταβλητή). Με την παλινδρόμηση ενδιαφέρεται να προσδιορίσει μία σχέση δόσης-αντίδρασης για το συγκεκριμένο φάρμακο. Στις μη πειραματικές μελέτες ή δειγματοληψίες, γίνονται μετρήσεις σε δύο χαρακτηριστικά (μεταβλητές) για κάθε άτομο (μονάδα) του δείγματος. Σε ένα δείγμα 10 μαθητών μετράμε, για παράδειγμα, το βάρος και το ύψος τους. Η διάκριση εδώ μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής είναι δύσκολη. Αν αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το "τι συμβαίνει με το βάρος των παιδιών όταν αλλάζει το ύψος τους", τότε

θεωρούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή X το ύψος και ως εξαρτημένη μεταβλητή Y το βάρος. Οπότε, ενδιαφερόμαστε για την **παλινδρόμηση του βάρους (*Y*) πάνω στο ύψος (*X*)**. Αντίθετα, αν μας ενδιαφέρει το "τι συμβαίνει με το ύψος των παιδιών όταν αλλάζει το βάρος τους", τότε θεωρούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή X το βάρος και ως εξαρτημένη μεταβλητή Y το ύψος. Τότε έχουμε παλινδρόμηση του ύψους (Y) πάνω στο βάρος (X).

Διάγραμμα Διασποράς

Ο παρακάτω πίνακας 10 δίνει τα ύψη X (σε cm) και τα βάρη Y (σε kg) των 18 αγοριών της Γ΄ Λυκείου του πίνακα 4. Οι τιμές του ύψους δίνονται σε αύξουσα σειρά.

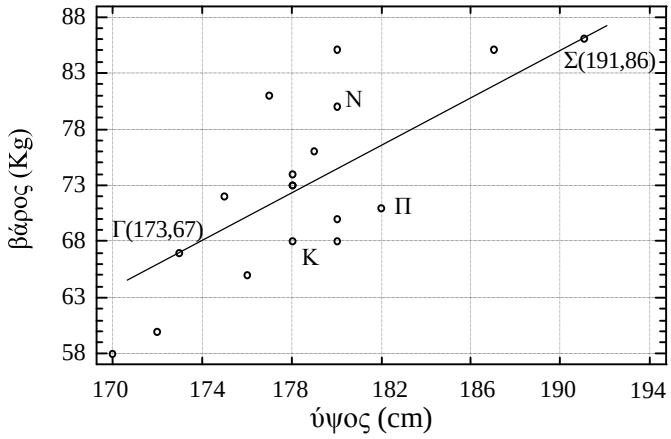
Πίνακας 10
Λίστα υψών (σε cm) και βαρών (σε kg) των 18 αγοριών του πίνακα 4.

Μαθητής	Ύψος X	Βάρος Y	Μαθητής	Ύψος X	Βάρος Y
Α	170	58	Κ	178	68
Β	172	60	Λ	179	76
Γ	173	67	Μ	180	68
Δ	175	72	Ν	180	80
Ε	176	65	Ξ	180	70
Ζ	177	81	Ο	180	85
Η	178	73	Π	182	71
Θ	178	74	Ρ	187	85
Ι	178	73	Σ	191	86

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε την περίπτωση όπου σε κάθε άτομο (μαθητή) γίνονται δύο μετρήσεις. Δηλαδή το δείγμα αποτελείται από τα ζεύγη τιμών των συνεχών μεταβλητών X (ύψος) και Y (βάρος).

Αν παραστήσουμε τα ζεύγη (x, y) των παρατηρήσεων σε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων, παρατηρούμε ότι προκύπτει μία "διασπορά" των σημείων που αντιστοιχούν στους μαθητές που εξετάζουμε. Η παράσταση αυτή των σημείων καλείται **διάγραμμα διασποράς** (scatter diagram), βλέπε σχήμα 16.

16



Διάγραμμα διασποράς και ευθεία προσαρμοσμένη “με το μάτι”
για τα δεδομένα του πίνακα 10 .

Η προσεκτική παρατήρηση ενός διαγράμματος διασποράς μπορεί να μας δώσει σημαντικές πληροφορίες για τη σχέση εξάρτησης που ενδεχομένως υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών τις οποίες εξετάζουμε. Η πείρα μας λέει ότι υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του ύψους και του βάρους κάθε μαθητή. Στο παράδειγμα αυτό το διάγραμμα διασποράς δείχνει, γενικά, ότι οι ψηλοί μαθητές είναι συνήθως και πιο βαρείς. Για παράδειγμα, ο *N* είναι ψηλότερος και βαρύτερος από τον *K*, ο *Π* είναι ψηλότερος και βαρύτερος από τον *K*, αλλά υπάρχουν και εξαιρέσεις, όπως ο *Π* είναι ψηλότερος από τον *N* αλλά ο *N* είναι βαρύτερος από τον *Π*.

Ευθεία Παλινδρόμησης

Από το διάγραμμα διασποράς του προηγούμενου παραδείγματος φαίνεται καθαρά ότι υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο ύψος *X* και το βάρος *Y* των 18 αγοριών της Γ΄ Λυκείου. Τα σημεία (x, y) είναι συγκεντρωμένα περίπου γύρω από μία ευθεία, δηλαδή η σχέση μεταξύ των *X* και *Y* είναι κατά προσέγγιση γραμμική. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μπορούμε να θεωρήσουμε τη μία μεταβλητή ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την άλλη ως εξαρτημένη. Εδώ θεωρούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή το ύψος *X* και ως εξαρτημένη μεταβλητή το βάρος *Y*, οπότε η ευθεία που θα προσαρμόζεται καλύτερα στα σημεία αυτά καλείται **ευθεία παλινδρόμησης της *Y* πάνω στη *X***.
Όπως γνωρίζουμε, η εξίσωση μιας ευθείας δίνεται από τη σχέση:

$$y = \alpha + \beta x \qquad (1)$$

όπου α και β είναι παράμετροι τις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε ή, όπως λέμε, να “εκτιμήσουμε”, έτσι ώστε η ευθεία που θα προκύψει να μας δίνει όσο

το δυνατόν την καλύτερη περιγραφή της σχέσης (εξάρτησης) που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών *X* και *Y*. Η παράμετρος α μας δίνει το σημείο $(0,\alpha)$, όπου η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, ενώ η παράμετρος β παριστάνει το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας.
Ο πιο εύκολος τρόπος χάραξης της ευθείας είναι αυτός που γίνεται "με το μάτι". Μια τέτοια ευθεία έχουμε φέρει και στο διάγραμμα διασποράς του σχήματος 16. Για να βρούμε τα α και β, εργαζόμαστε ως εξής:

- Επιλέγουμε δύο σημεία, έστω τα $\Gamma(173,67)$ και $\Sigma(191,86)$ πάνω στην ευθεία που φέραμε "με το μάτι".
- Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες (x, y) των σημείων αυτών στην (1), οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha + \beta x_1 \\ y_2 = \alpha + \beta x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 67 = \alpha + 173\beta \\ 86 = \alpha + 191\beta \end{cases}.$$

- Επιλύοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε $\alpha = -115{,}6$ και $\beta = 1{,}06$ οπότε η εξίσωση της ευθείας (1) γίνεται:

$$y = -115{,}6 + 1{,}06x\,. \qquad (2)$$

Επομένως, η ευθεία που κατά τη γνώμη μας προσαρμόζεται καλύτερα στα σημεία του διαγράμματος διασποράς διέρχεται από το σημείο (0 , -115,6) και έχει συντελεστή διεύθυνσης 1,06.

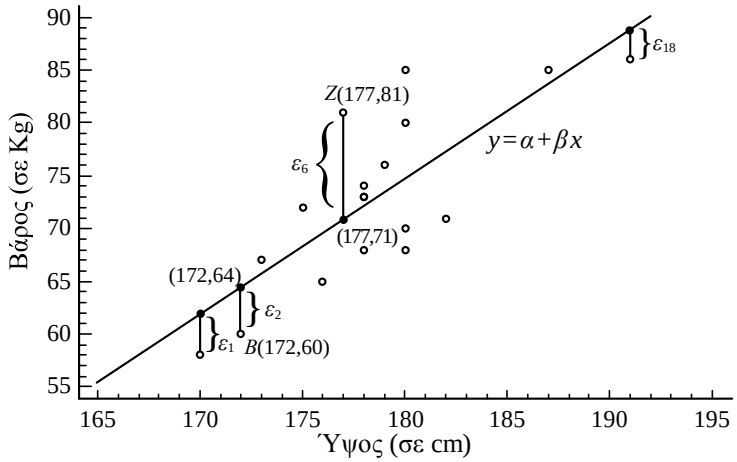
Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

Είδαμε ότι η πιο απλή διαδικασία προσαρμογής μιας ευθείας γραμμής σε ένα διάγραμμα διασποράς είναι "με το μάτι". Αυτή όμως έχει πολλά μειονεκτήματα παρά την απλότητά της. Το κυριότερο είναι η έλλειψη αντικειμενικότητας, αφού διάφορα άτομα μπορούν να χαράξουν διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες. Ακόμα και το ίδιο άτομο μπορεί να χαράζει διαφορετικές ευθείες κάθε φορά. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια ακριβέστερη μέθοδο για την προσαρμογή μιας ευθείας γραμμής σε τέτοιου είδους δεδομένα.
Μιά μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων α και β, άρα και για την εύρεση της εξίσωσης της καλύτερης ευθείας που προσαρμόζεται στα δεδομένα, είναι η **"μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων"**.
Η πρώτη αναφορά με ολοκληρωμένη ανάπτυξη της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων εμφανίζεται το 1805 σε μια εργασία του Γάλλου μαθηματικού Legendre, (1752-1833) και αμέσως μετά από το Γερμανό μαθηματικό Gauss, (1777-1855) στην αστρονομική του πραγματεία "Theoria Motus" για τον προσδιορισμό της τροχιάς του μικρού πλανήτη Δήμητρα. Μάλιστα εδώ ο Gauss

αναφέρει ότι χρησιμοποίησε την αρχή των ελαχίστων τετραγώνων πριν από το 1794 (σε ηλικία μόλις 17 ετών), έτσι ώστε να προηγείται του Legendre ως προς την ανακάλυψη αυτής της μεθόδου.

Ας δούμε ξανά το διάγραμμα διασποράς στο σχήμα 17 του προηγούμενου παραδείγματος για τα ύψη *X* και τα βάρη *Y* των 18 μαθητών του πίνακα 10. Στο διάγραμμα αυτό έχουμε φέρει και μία ευθεία $y = \alpha + \beta x$, που πιστεύουμε ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα σημεία (x_i, y_i) για τις $\nu = 18$ συνολικά μετρήσεις των μεταβλητών *X* και *Y*.

17



Προσαρμογή ευθείας ελαχίστων τετραγώνων στο διάγραμμα διασποράς του δεδομένων του πίνακα 10 .

Έτσι, για παράδειγμα, για το μαθητή *B*, σημείο $B(172,60)$, με ύψος $x_2 = 172\,\text{cm}$ έχουμε βρει, όπως φαίνεται στον πίνακα 10, βάρος $y_2 = 60\text{kg}$, ενώ, σύμφωνα με την ευθεία που φέραμε, το βάρος του αναμένεται να είναι (περίπου) 64kg, έχουμε δηλαδή ένα σφάλμα $\varepsilon_2 = 60 - 64 = -4$, δηλαδή βάρος 4kg λιγότερο από το αναμενόμενο. Ομοίως για το μαθητή *Z*, σημείο $Z(177,81)$, το βάρος του που μετρήθηκε ήταν $y_6 = 81\text{kg}$, ενώ το αναμενόμενο βάρος του σύμφωνα με την ευθεία που φέραμε είναι 71kg, έχουμε δηλαδή ένα σφάλμα $\varepsilon_6 = 81 - 71 = 10$, δηλαδή βάρος 10kg περισσότερο από το αναμενόμενο. Ανάλογα σφάλματα υπολογίζονται και για τους άλλους μαθητές. Θα θέλαμε λοιπόν να βρούμε με κάποια μέθοδο εκείνη την ευθεία $y = \alpha + \beta x$, έτσι ώστε τα σφάλματα που προκύπτουν να είναι όσο το δυνατόν μικρότερα.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων συνίσταται στον προσδιορισμό των παραμέτρων *α*, *β*, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων (x_i, y_i) από την ευθεία

$y = \alpha + \beta x$, δηλαδή το

$$\sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \tag{4}$$

να γίνεται ελάχιστο.
Οι τιμές των παραμέτρων α και β, που ελαχιστοποιούν την (4), καλούνται **εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων** (least square estimators), συμβολίζονται με $\hat{\alpha}$ ("α καπέλο") και $\hat{\beta}$ ("β καπέλο"), αντιστοίχως, και αποδεικνύεται (η απόδειξη εδώ παραλείπεται) ότι δίνονται από τις σχέσεις:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2} \\ \hat{\alpha} &= \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \end{aligned}} \tag{5}$$

όπου $\bar{y} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} y_i$, $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i$.

Η ευθεία

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x \tag{6}$$

καλείται **ευθεία ελαχίστων τετραγώνων** ή **ευθεία παλινδρόμησης** της Y (πάνω) στη X. Αντικαθιστώντας το $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$ στη σχέση (6) βρίσκουμε την

$$\hat{y} - \bar{y} = \hat{\beta}(x - \bar{x}) ,$$

η οποία φανερώνει ότι η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$ διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y})$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης το $\hat{\beta}$.
Αντικαθιστώντας τις τιμές x_i και y_i από τον πίνακα 10 στις σχέσεις (5) βρίσκουμε:

$$\hat{\beta} = 1{,}28 \quad \text{και} \quad \hat{\alpha} = -156{,}1$$

οπότε η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα είναι από τη σχέση (6), η

$$\hat{y} = -156{,}1 + 1{,}28x .$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει σημαντική διαφορά από την ευθεία $y = -115{,}6 + 1{,}06x$ που προσαρμόσαμε "με το μάτι" στο σχήμα 16.

Ερμηνεία των $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$

Στην εξίσωση ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\alpha}$ της παραμέτρου α παριστάνει την τεταγμένη του σημείου στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$, δηλαδή την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν $x = 0$. Όταν το $\hat{\alpha} = 0$ τότε η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Έστω τώρα δυο τιμές x_1 και $x_2 = x_1 + 1$ της ανεξάρτητης μεταβλητής. Τότε λαμβάνοντας τη διαφορά των αντίστοιχων προβλεπόμενων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής βρίσκουμε

$$\hat{y}_2 - \hat{y}_1 = (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_2) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_1) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_1 + 1) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_1) = \hat{\beta}$$

δηλαδή $\hat{y}_2 = \hat{y}_1 + \hat{\beta}$. Συνεπώς ο συντελεστής διεύθυνσης $\hat{\beta}$ της ευθείας $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ παριστά τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν το X μεταβληθεί κατά μια μονάδα. Έτσι, όταν το x αυξηθεί κατά μια μονάδα τότε το $\hat{y}$ αυξάνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες όταν $\hat{\beta} > 0$ ή ελαττώνεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες όταν $\hat{\beta} < 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

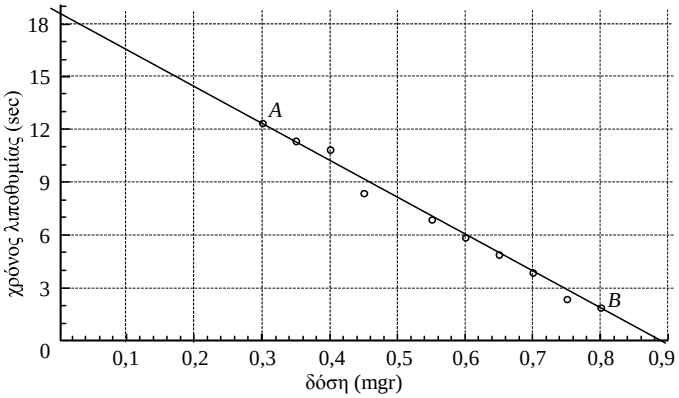
1. Ένας ερευνητής, για να εξετάσει την επίδραση ενός αναισθητικού, εμβολίασε 10 ποντίκια με διαφορετική δόση κάθε φορά. Οι χρόνοι που μεσολάβησαν ώσπου τα ποντίκια να χάσουν τις αισθήσεις τους (λιποθυμήσουν) καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

Δόση (σε mgr)	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**
Χρόνος λιποθυμίας (sec)	**12,5**	**11,5**	**11**	**8,5**	**7**	**6**	**5**	**4**	**2,5**	**2**

α) Να γίνει το διάγραμμα διασποράς
β) Να επιλεγούν δύο πιθανά σημεία από τα οποία διέρχεται η προσαρμοσμένη ευθεία παλινδρόμησης και με βάση αυτά να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας.
γ) Ύστερα από πόσο χρόνο αναμένεται να λιποθυμήσει ένα ποντίκι, εάν του γίνει ένεση (εμβολιαστεί) με 0, 0,5, 1 mgr αναισθητικού, αντίστοιχα; Να σχολιαστούν τα αποτελέσματα.

ΛΥΣΗ

α) Η περίπτωση που εξετάζεται εδώ αναφέρεται σε μια πειραματική κατάσταση, κατά την οποία ο ερευνητής καθορίζει εκ των προτέρων τη δόση του αναισθητικού που θα δώσει στα πειραματόζωα και μετρά τις αντιδράσεις τους. Ενδιαφέρεται δηλαδή να προσδιορίσει μια σχέση δόσης αναισθητικού και χρόνου λιποθυμίας. Έτσι, η δόση αναισθητικού παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή (X) και ο χρόνος λιποθυμίας την εξαρτημένη μεταβλητή (Y). Επομένως, το διάγραμμα διασποράς παριστάνεται παρακάτω:



β) Δύο σημεία από τα οποία εκτιμάται "με το μάτι" ότι θα διέρχεται η καλύτερη ευθεία παλινδρόμησης είναι τα $A(0{,}3\ ,\ 12{,}3)$ και $B(0{,}8\ ,\ 1{,}9)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ευθείας $y = \alpha + \beta x$ έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 12{,}2 = \alpha + 0{,}3\beta \\ 1{,}9 = \alpha + 0{,}8\beta, \end{cases}$$

από την επίλυση του οποίου βρίσκουμε $\alpha = 18{,}5$ και $\beta = -20{,}8$, οπότε η ευθεία παλινδρόμησης έχει εξίσωση

$$y = 18{,}5 - 20{,}8x\ .$$

Παρατηρούμε, όπως άλλωστε αναμενόταν και από το διάγραμμα διασποράς, ότι ο συντελεστής διεύθυνσης είναι αρνητικός, δηλαδή έχουμε αρνητική εξάρτηση του χρόνου λιποθυμίας ως προς τη δόση αναισθητικού. Μεγαλύτερη δόση επιφέρει γρηγορότερη (σε μικρότερο χρόνο) λιποθυμία.

γ) Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις τιμές της δόσης $x = 0$, 0,5 και 1 mgr, βρίσκουμε τον προβλεπόμενο χρόνο λιποθυμίας του ποντικιού $y = 18{,}5$, $8{,}1$ και $-2{,}3$ sec, αντίστοιχα.

ΣΧΟΛΙΟ

Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται εδώ δυο παράδοξα:

- Μηδενική δόση του αναισθητικού προκαλεί λιποθυμία σε 18,5 sec.

Υποθέτουμε όμως εδώ ότι τα ποντίκια χάνουν τις αισθήσεις τους μόνο από τη δόση του αναισθητικού και όχι από το φόβο τους!

- Δόση αναισθητικού 1 mgr προκαλεί λιποθυμία σε $-2{,}3$ sec. Όμως και πάλι εδώ υποθέτουμε ότι η ένεση γίνεται σε ποντίκι που έχει τις αισθήσεις του και όχι να είναι πριν από $2{,}3$ sec λιπόθυμο!

Οι δύο αυτές παρατηρήσεις οδηγούν στο βασικό συμπέρασμα ότι οι προβλέψεις της εξαρτημένης μεταβλητής έχουν νόημα, είναι δηλαδή δυνατές, μόνο για τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής οι οποίες βρίσκονται στο διάστημα που έχουμε εξετάσει ή τουλάχιστον πολύ κοντά στα άκρα του διαστήματος αυτού.

2. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις πωλήσεις (ζήτηση) ενός προϊόντος (π.χ. των κερασιών) *Y* (σε κιλά) από το μανάβικο μιας περιοχής και τις αντίστοιχες τιμές *X* του προϊόντος σε εκατοντάδες δρχ. ανά κιλό για μια ορισμένη χρονική περίοδο

Τιμή κερασιών ανά κιλό σε εκατοντάδες δρχ., *X*	**15**	**13**	**11**	**9**	**9**	**6**	**5**	**4**
Πωλήσεις σε κιλά, *Y*	**5**	**6**	**8**	**10**	**9**	**12**	**15**	**11**

α) Να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ (των πωλήσεων σε συνάρτηση με την τιμή) και να χαραχτεί στο αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.

β) Να ερμηνευθεί η έννοια των $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$

γ) Ποια είναι η αναμενόμενη ζήτηση (πωλήσεις), όταν η τιμή είναι 800 δρχ./κιλό;

δ) Με βάση την ευθεία αυτή μπορούμε να προβλέψουμε την τιμή του προϊόντος, όταν η ζήτηση είναι 10 κιλά;

ΛΥΣΗ

α) Για τον προσδιορισμό της εξίσωσης της ευθείας ελάχιστων τετραγώνων διευκολύνει ο διπλανός πίνακας με τις απαραίτητες πράξεις. Επομένως, έχουμε:

$v = 8$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{v} = \frac{72}{8} = 9$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{v} = \frac{76}{8} = 9{,}5$$

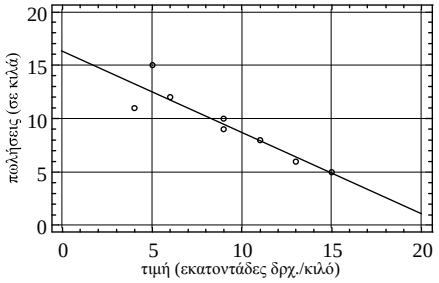
x	y	x^2	xy
15	5	225	75
13	6	169	78
11	8	121	88
9	10	81	90
9	9	81	81
6	12	36	72
5	15	25	75
4	11	16	44
$\Sigma x = 72$	$\Sigma y = 76$	$\Sigma x^2 = 754$	$\Sigma xy = 603$

$$\hat{\beta} = \frac{\nu\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\nu\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{8(603) - (72)(76)}{8(754) - (72)^2} = \frac{-648}{848} = -0{,}76$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 9{,}5 + (0{,}76)(9) = 16{,}34\,.$$

Άρα, η εξίσωση της ζήτησης (των κερασιών) σε συνάρτηση με την τιμή τους είναι $\hat{y} = 16{,}34 - 0{,}76x$.

Επειδή γνωρίζουμε ότι η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $(0, \alpha)$ και $(\bar{x}, \bar{y})$, είναι εύκολο να χαραχτεί στο διάγραμμα διασποράς, όπως φαίνεται δίπλα.



β) Το $\hat{\alpha} = 16{,}34$ προσδιορίζει την προβλεπόμενη ζήτηση του προϊόντος, όταν η τιμή του είναι 0 δρχ./κιλό Προφανώς εδώ τέτοια περίπτωση δεν είναι ρεαλιστική.

Το β προσδιορίζει τη μεταβολή που επέρχεται στην εξαρτημένη μεταβλητή *Y*, όταν η *X* μεταβληθεί κατά μία μονάδα. Δηλαδή όταν η τιμή των κερασιών αυξηθεί κατά 100 δρχ./κιλό (μία μονάδα), οι πωλήσεις θα ελαττωθούν κατά 0,76 κιλά.

γ) Όταν η αξία του προϊόντος είναι 800δρχ./κιλό, σημαίνει ότι $x = 8$ (8 εκατοντάδες δρχ.). Συνεπώς, για $x = 8$ η αναμενόμενη ζήτηση y είναι $\hat{y} = 16{,}34 - 0{,}76 \cdot 8 = 16{,}34 - 6{,}08 = 10{,}26$ κιλά.

δ) Προφανώς, στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση της ευθείας παλινδρόμησης της εξαρτημένης μεταβλητής *Y* πάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή *X*, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προκύπτουσα ευθεία για πρόβλεψη της *X*, όταν δίνεται το *Y*. Για να γίνει κάτι τέτοιο, πρέπει εξαρχής να εκτιμηθεί η ευθεία παλινδρόμησης της *X* πάνω στην *Y*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που προσαρμόζεται (με το μάτι) καλύτερα στα δεδομένα.

(α)

x	12	15	16	18	18

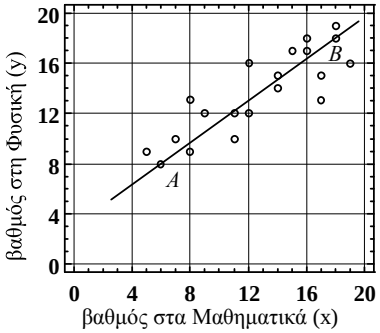
y	13	14	18	18	20

(β)

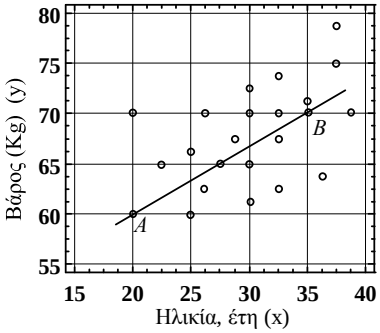
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	12	10	10	6	6	3	5	2	4

2. Παρακάτω δίνονται δύο διαγράμματα διασποράς με τις προσαρμοσμένες ευθείες, όπως τις χάραξε "με το μάτι" ένας μαθητής. Χρησιμοποιώντας τα σημεία Α και Β να βρείτε τις εξισώσεις $y = \alpha + \beta x$ των αντίστοιχων ευθειών.

(i)



(ii)



3. Για καθένα από τα παρακάτω ζεύγη τιμών να βρείτε την εξίσωση ελαχίστων τετραγώνων $y = \alpha + \beta x$ και να την χαράξετε στο αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς. Στη συνέχεια να προβλέψετε την τιμή της y, όταν $x = 6$.

α)

x	1	2	3	4	5
y	1	2	3	4	5

β)

x	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1

γ)

x	1	2	3	4	5
y	4	2	5	1	3

δ)

x	1	2	3	4	5
y	3	1	5	2	4

4. Να εφαρμόσετε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα της Εφαρμογής 1, για να εκτιμήσετε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης του χρόνου λιποθυμίας (Y) των ποντικιών στη δόση αναισθητικού (X). Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα που προκύπτουν με τη μέθοδο αυτή με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν με την προσαρμογή της ευθείας "με το μάτι".

5. α) Με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων να βρείτε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στη X για τα παρακάτω δεδομένα 5 μαθητών.

Επίδοση στα Μαθηματικά, x	12	15	16	18	18

Επίδοση στη Φυσική, y	13	14	18	18	20

β) Αν υποθέσουμε ότι χάθηκε ο βαθμός της Φυσικής για το μαθητή που πήρε 15 στα Μαθηματικά και για να μην υποχρεωθεί ο μαθητής να ξαναδώσει εξετάσεις στη Φυσική, ποιο βαθμό, κατά τη γνώμη σας, πρέπει να πάρει;

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα αποτελέσματα των μετρήσεων της συστολικής πίεσης και της ηλικίας 10 γυναικών:

Ηλικία (έτη)	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Πίεση (mm Hg)	116	117	121	147	111	133	105	153	155	176

α) Ποια από τις δύο μεταβλητές ηλικία και συστολική πίεση μπορεί να θεωρηθεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή;
β) Να γίνει το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.
γ) Να χαράξετε “με το μάτι” την ευθεία που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.
δ) Τι συστολική πίεση προβλέπετε για μια γυναίκα 75 ετών;

2. Να χρησιμοποιήσετε τα δεδομένα του Πίνακα 4 μόνο για τα αγόρια, για να προβλέψετε το ύψος ενός μαθητή όταν:
α) ο πατέρας του έχει ύψος 180 cm
β) ο μέσος όρος του ύψους των γονιών του είναι 170 cm.

3. Να χρησιμοποιήσετε τα δεδομένα του Πίνακα 4 μόνο για τα κορίτσια, για να προβλέψετε το ύψος μιας μαθήτριας όταν:
α) η μητέρα της έχει ύψος 167 cm
β) ο μέσος όρος του ύψους των γονιών της είναι 170 cm.

4. Από 8 γάμους που έγιναν σε μια εκκλησία κατά τη διάρκεια ενός μηνός, οι ηλικίες των ανδρογύνων ήσαν:

Ηλικία γαμπρού, y	20	22	24	25	28	30	33	38
Ηλικία νύφης , x	20	20	22	27	24	25	28	34

α) Να υπολογίσετε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στη X και να τη χαράξετε στο αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.
β) Να βρείτε την αναμενόμενη ηλικία του γαμπρού για μια υποψήφια νύφη 25 ετών.

γ) Για κάθε έτος που μια γυναίκα καθυστερεί να παντρευτεί πόσο αυξάνεται η ηλικία του υποψήφιου γαμπρού.

5. Για τα ίδια δεδομένα της προηγούμενης άσκησης (4) να βρείτε:
α) την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της X πάνω στη Y,
β) την αναμενόμενη ηλικία της νύφης για έναν υποψήφιο γαμπρό 28 ετών,
γ) για κάθε έτος που ένας άνδρας καθυστερεί να παντρευτεί πόσο αυξάνεται η ηλικία της υποψήφιας νύφης;

2.5 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

Εισαγωγή

Εχουμε δει μέχρι τώρα ότι ένα σύνολο παρατηρήσεων μιας μεταβλητής περιγράφεται με τα μέτρα θέσης και διασποράς, όπως για παράδειγμα, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση, αντιστοίχως. Επιπλέον, με τη γραμμική παλινδρόμηση που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πώς βρίσκουμε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης η οποία προσαρμόζεται καλύτερα στο "σμήνος" των σημείων όπως αυτά παριστάνονται σε ένα διάγραμμα διασποράς.
Ας δούμε, για παράδειγμα, τα παρακάτω ζεύγη τιμών (x_i, y_i) για τις μεταβλητές X, Y και (x_i', y_i') για τις μεταβλητές X', Y':

x_i	y_i
1	2,5
1	4,0
2	3,0
3	4,5
3	4,0
4	3,5
5	5,5
5	5,0

x_i'	y_i'
1,0	2,5
1,5	1,0
2,0	4,0
2,5	5,5
3,0	6,0
4,0	3,5
4,5	6,0
5,5	3,5

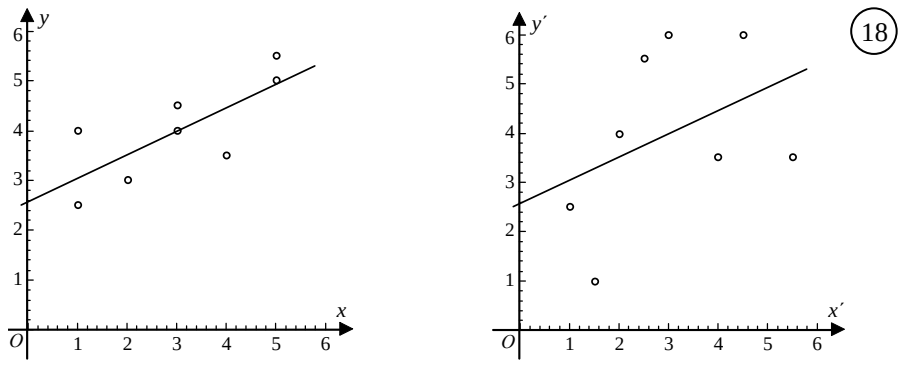
από τα οποία βρίσκουμε:

- $\bar{x} = 3,\ \bar{y} = 5,\quad s_x = 1{,}5,\quad s_y = 0{,}94$

- $\bar{x}' = 3,\ \bar{y}' = 5,\quad s_{x'} = 1{,}46,\quad s_{y'} = 1{,}66$

- το διάγραμμα διασποράς στο σχήμα 18(α) των σημείων (x_i, y_i) και την αντίστοιχη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = 2{,}58 + 0{,}47x$

- το διάγραμμα διασποράς στο σχήμα 18(β) των σημείων (x_i', y_i') και την αντίστοιχη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y}' = 2{,}58 + 0{,}47x'$.



(α) (β)

Στα δύο αυτά διαγράμματα διασποράς βλέπουμε ότι προσαρμόζεται η ίδια ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης. Όμως τα σημεία του σμήνους στο διάγραμμα (α) είναι περισσότερο συγκεντρωμένα γύρω από την ευθεία ενώ στο διάγραμμα (β) έχουμε ένα πιο χαλαρό σμήνος σημείων γύρω από την αντίστοιχη ευθεία παλινδρόμησης. Δηλαδή στην πρώτη περίπτωση η γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών είναι ισχυρότερη παρά στη δεύτερη περίπτωση.
Ένα μέτρο που μας δίνει το μέγεθος της γραμμικής σχέσης ή το βαθμό συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από την ευθεία παλινδρόμησης είναι ο λεγόμενος **συντελεστής γραμμικής συσχέτισης** (linear correlation coefficient).

Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X και Y ορίζεται με βάση ένα δείγμα ν ζευγών παρατηρήσεων $(x_i,\ y_i)$ $i=1,2,...,\nu$, συμβολίζεται με $r(X,Y)$ ή απλά με r και δίνεται από τον τύπο:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{v}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{v}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{v}(y_i - \bar{y})^2}} \qquad (1)$$

αναφέρεται δε και ως συντελεστής συσχέτισης του Pearson.

Από τον ορισμό του r παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές x_i της X και y_i της Y (μεγαλύτερες από τη μέση τιμή τους) οι διαφορές $(x_i - \bar{x})$ και $(y_i - \bar{y})$ είναι θετικές, οπότε το γινόμενό τους είναι θετικό. Όμοια για μικρές τιμές x_i και y_i, οι διαφορές $(x_i - \bar{x})$ και $(y_i - \bar{y})$ είναι αρνητικές, οπότε το γινόμενό τους είναι πάλι θετικό. Επομένως, όταν σε μεγάλες τιμές της μεταβλητής X αντιστοιχούν και μεγάλες τιμές της Y, ή σε μικρές τιμές της X αντιστοιχούν μικρές τιμές της Y τότε ο συντελεστής συσχέτισης είναι θετικός και λέμε ότι οι X, Y είναι θετικά συσχετισμένες. Ανάλογα μπορούμε να δούμε ότι ο r παίρνει αρνητικές τιμές όταν σε μεγάλες τιμές της μιας μεταβλητής αντιστοιχούν μικρές τιμές της άλλης, οπότε λέμε ότι οι μεταβλητές αυτές είναι αρνητικά συσχετισμένες.
Με βάση τον παρακάτω πίνακα και τον τύπο (1) υπολογίζουμε το συντελεστή

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	2,5	-2	-1,5	4	2,25	3
1	4,0	-2	0	4	0	0
2	3,0	-1	-1	1	1	1
3	4,5	0	0,5	0	0,25	0
3	4,0	0	0	0	0	0
4	3,5	1	-0,5	1	0,25	-0,5
5	5,5	2	1,5	4	0,25	3
5	5,0	2	1	4	1	2
24	32	0	0	18	7	8,5

γραμμικής συσχέτισης για τα δεδομένα του πρώτου παραδείγματος

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{8,5}{\sqrt{18}\sqrt{7}} \approx 0,76 .$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε και το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης για τα δεδομένα του δεύτερου παραδείγματος όπου βρίσκουμε $r' \approx 0{,}41$.

Συγκρίνοντας τους δύο συντελεστές συσχέτισης βλέπουμε ότι $r > r'$. Αυτό δηλώνει ότι οι μεταβλητές *X, Y* του πρώτου παραδείγματος είναι περισσότερο γραμμικά συσχετισμένες παρά οι μεταβλητές X', Y' του δεύτερου παραδείγματος.

Ο συντελεστής συσχέτισης είναι καθαρός αριθμός, δηλαδή δεν εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης, επομένως είναι ανεξάρτητος των χρησιμοποιούμενων μονάδων μέτρησης των μεταβλητών *X* και *Y*. Επί πλέον ισχύει πάντοτε ότι:

$$\boxed{-1 \le r \le +1\,.}$$

Πιο συγκεκριμένα όταν:

- $0 < r < +1$, τότε οι *X, Y* είναι **θετικά** γραμμικά συσχετισμένες (σχήμα 19(γ), (ε))

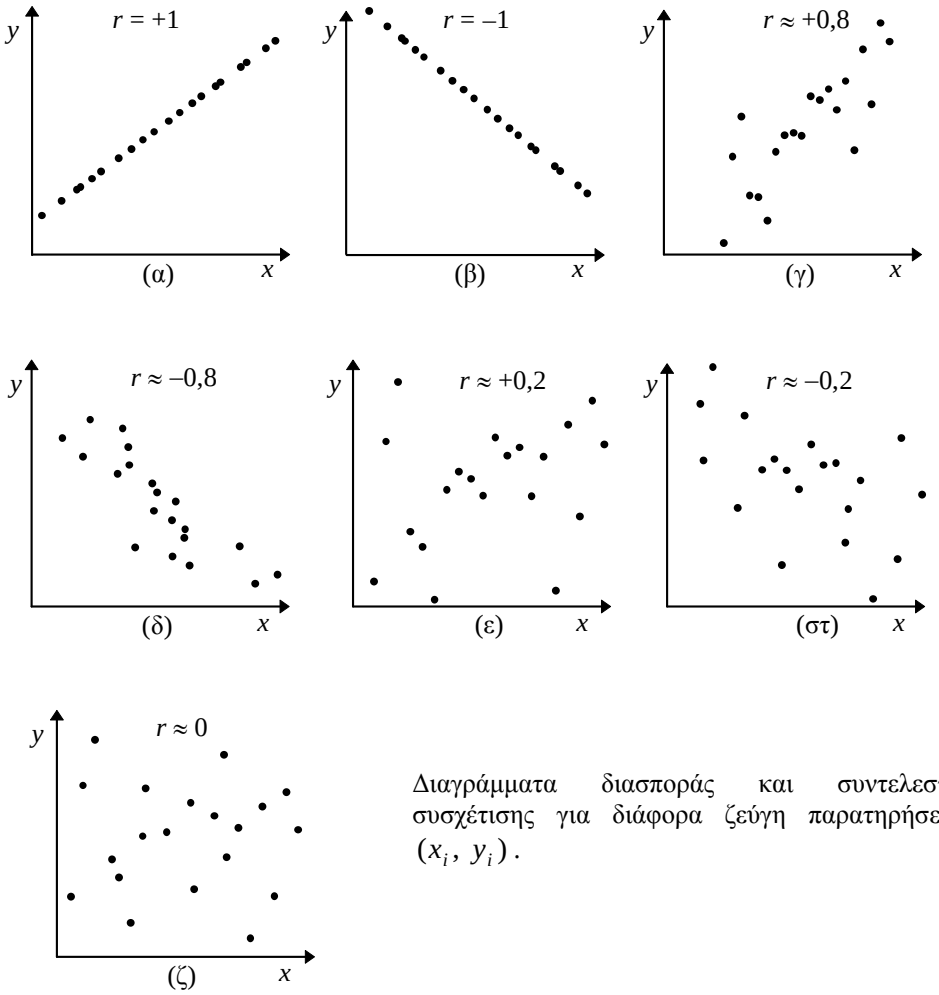
- $-1 < r < 0$, τότε οι *X, Y* είναι **αρνητικά** γραμμικά συσχετισμένες (σχήμα 19(δ), (στ))

- $r = +1$, τότε έχουμε **τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση** και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με θετική κλίση (σχήμα 19(α)), δηλαδή $y = \alpha + \beta x$, $\beta > 0$

- $r = -1$, τότε έχουμε **τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση** και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με αρνητική κλίση (σχήμα 19(β)), δηλαδή $y = \alpha + \beta x$, $\beta < 0$

- $r = 0$, τότε **δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση** μεταξύ των μεταβλητών. Οι μεταβλητές δηλαδή *X, Y* είναι **γραμμικά ασυσχέτιστες** (σχήμα 19(ζ)).

19



Διαγράμματα διασποράς και συντελεστές συσχέτισης για διάφορα ζεύγη παρατηρήσεων $(x_i,\ y_i)$.

Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r δίνεται ισοδύναμα και από τον παρακάτω τύπο, η χρήση του οποίου διευκολύνει συχνά τους υπολογισμούς κυρίως στην περίπτωση που οι $\overline{x},\ \overline{y}$ δεν είναι ακέραιοι:

$$r = \frac{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\sqrt{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}\sqrt{\nu\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)^2}} \qquad (2)$$

Συσχέτιση και Παλινδρόμηση

Η παλινδρόμηση και η συσχέτιση, όπως τις εξετάσαμε έως τώρα, είναι δύο διαδικασίες μελέτης διμεταβλητών πληθυσμών. Η παλινδρόμηση προσδιορίζει τη σχέση εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών, ενώ ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δίνει ένα μέτρο του μεγέθους της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών. Επομένως, οι δύο διαδικασίες δεν είναι άσχετες μεταξύ τους.
Όταν δεν έχουμε πειραματικά δεδομένα, να προκαθορίζονται δηλαδή οι τιμές της μιας μεταβλητής, τότε μπορεί να μελετηθεί είτε η εξάρτηση της *Y* από τη *X* είτε η εξάρτηση της *X* από την *Y*. Το πόσο έντονη είναι η σχέση εξάρτησης μεταξύ των δύο μεταβλητών μας το δίνει ο συντελεστής συσχέτισης. Όσο το *r* πλησιάζει στο $+1$ τόσο τα σημεία του διαγράμματος διασποράς τείνουν να βρίσκονται σε μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\beta > 0$. Όσο το *r* πλησιάζει στο -1 τόσο τα σημεία τείνουν να βρίσκονται σε μια ευθεία με $\beta < 0$. Όταν $r \approx 0$, τότε $\beta \approx 0$. Συνήθως στις εφαρμογές εξετάζεται η συσχέτιση και η παλινδρόμηση μαζί, οπότε έχουμε πληρέστερη και πιο ολοκληρωμένη εξέταση των δύο μεταβλητών.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί ο συντελεστής συσχέτισης *r* μεταξύ των μεταβλητών *X* και *Y* με βάση τις παρακάτω τιμές:

x	**10**	**13**	**17**	**21**	**25**	**28**	**30**
y	**21**	**24**	**29**	**25**	**36**	**33**	**40**

ΛΥΣΗ

Για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των *X* και *Y* διευκολύνει ο παρακάτω πίνακας:

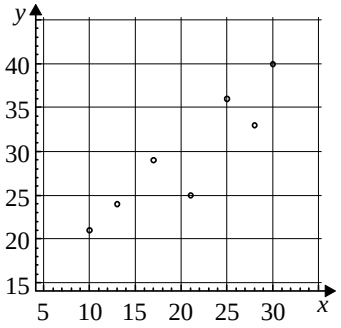
x	y	x^2	y^2	xy	
10	21	100	441	210	
13	24	169	576	312	
17	29	289	841	493	
21	25	441	625	525	$\nu=7$
25	36	625	1296	900	
28	33	784	1089	924	
30	40	900	1600	1200	
$\Sigma x = 144$	$\Sigma y = 208$	$\Sigma x^2 = 3308$	$\Sigma y^2 = 6468$	$\Sigma xy = 4564$	

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$r = \frac{\nu\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\nu\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\sqrt{\nu\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}}$$

$$= \frac{7(4564) - (144)(208)}{\sqrt{7(3308) - (144)^2}\sqrt{7(6468) - (208)^2}} \approx 0{,}9 \ .$$

Η υψηλή τιμή του r μας δείχνει ότι υπάρχει πολύ έντονη θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y, όπως εξάλλου μπορούμε να το διαπιστώσουμε και από το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να διατάξετε τις παρακάτω τιμές του r σε αύξουσα τάξη του βαθμού γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών: -0,6, 0,9, -0,7, 0,2, 0, -1.

2. Από τα διαγράμματα διασποράς των παρακάτω ζευγών (x_i, y_i) να εκτιμήσετε (χωρίς πράξεις) εάν η γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y είναι θετική ή αρνητική και επιπλέον αν είναι μικρή, μέτρια ή μεγάλη:

α)

x	1	3	5	7	9	10	12	13
y	-2	0	1	3	5	6	8	10

β)

x	1	3	5	7	9	10	12	13
y	4	5	1	6	4	3	8	10

γ)

x	1	3	5	7	9	10	12	13
y	10	8	3	4	6	3	2	5

δ)

x	1	3	5	7	9	10	12	13

y	10	8	3	4	1	6	5	12

ε)

x	1	3	5	7	9	10	12	13
y	6	8	6	3	5	7	8	9

3. Να υπολογίσετε τους συντελεστές γραμμικής συσχέτισης για τα ζεύγη τιμών $(x_i,\ y_i)$ της προηγούμενης άσκησης και να τους συγκρίνετε με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις σας.

4. Να βρείτε τους συντελεστές γραμμικής συσχέτισης για τα παρακάτω ζεύγη τιμών και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

α)

x	1	2	3	4	5
y	4	2	0	-2	-4

β)

x	1	2	3	4	5
y	-4	-2	0	2	4

5. Για τέσσερα ζεύγη παρατηρήσεων $(x_i,\ y_i)$ έχουμε:

$$\bar{x} = 7,\quad \bar{y} = 4{,}5,\quad \sum x_i^2 = 210,\quad \sum y_i^2 = 92,\quad \sum x_i y_i = 138.$$

Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης..

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης $(x, y > 0)$:

x	y	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	3			
2	6	9	1	3
-	1			
6	-			
8	8			
9	13			

7. α) Να δείξετε ότι $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \nu\bar{x}\bar{y}$.

β) Για εφτά ζεύγη παρατηρήσεων $(x_i,\ y_i)$ έχουμε

$\sum(x_i - \bar{x})^2 = 28$, $\sum(y_i - \bar{y})^2 = 112$, $\sum x_i y_i = 308$, $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 9$

Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η κατά άτομο κατανάλωση (σε γαλόνια) άπαχου (Y) και πλήρους (X) γάλακτος για τα έτη 1982-87 στις ΗΠΑ δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	Έτος					
	1982	1983	1984	1985	1986	1987
Πλήρες γάλα, x	15,6	15,2	14,7	14,3	13,4	12,8
Άπαχο γάλα, y	10,8	11,1	11,5	12,1	12,8	13,2

α) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε το συντελεστή συσχέτισης.
β) Αν μετατραπούν οι ποσότητες γάλακτος σε λίτρα, ποια θα είναι η τιμή του συντελεστή συσχέτισης; (1 γαλόνι $\approx$ 3,8 λίτρα)

2. Τα παρακάτω δεδομένα παριστάνουν τους δείκτες ευφυΐας (I.Q.) 10 μητέρων (X) και των θυγατέρων τους (Y):

I.Q. μητέρας	I.Q. θυγατέρας	I.Q. μητέρας	I.Q. θυγατέρας
85	90	115	110
90	100	120	125
95	90	120	110
100	105	130	130
110	120	135	120

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς
β) Από το διάγραμμα διασποράς να εκτιμήσετε το συντελεστή συσχέτισης
γ) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε το συντελεστή συσχέτισης

3. Ένας ερευνητής πιστεύει ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ καπνιστών (του αριθμού τσιγάρων που καπνίζουν κάθε μέρα) και της εξυπνάδας (δείκτης I.Q.). Με βάση τα παρακάτω δεδομένα για 15 καπνιστές, να σχολιάσετε τον ισχυρισμό του ερευνητή.

Αριθμός τσιγάρων x	Τυποποιημένος δείκτης I.Q. y	Αριθμός τσιγάρων x	Τυποποιημένος δείκτης I.Q. y
7	10	1	3
49	6	10	3
41	15	18	22
38	5	21	17
37	12	15	12
19	4	7	9
35	19	38	13
40	11		

Δίνονται: $\nu = 15$, $\Sigma x = 376$, $\Sigma y = 161$, $\Sigma x^2 = 12714$,
$\Sigma y^2 = 2213$, $\Sigma xy = 4317$

4. Σε μια εξέταση στα Μαθηματικά οκτώ μαθητών η βαθμολογία δύο

εξεταστών Α, Β ήταν ως ακολούθως:

	Μαθητής							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Εξεταστής Α	55	62	71	66	63	56	72	51
Εξεταστής Β	54	56	61	66	63	61	73	54

Να εξετάσετε εάν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ της βαθμολογίας των δύο εξεταστών.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ο αριθμός των παιδιών σε ένα δείγμα 80 οικογενειών μιας πόλης δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός Παιδιών	0	1	2	3	4	5	6
Οικογένειες	10	25	20	12	6	5	2

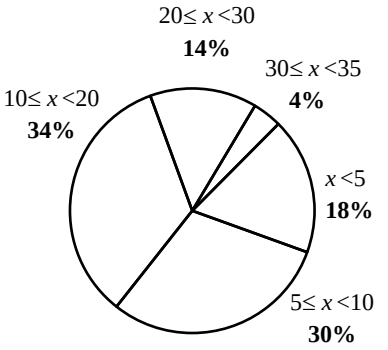
α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεση τιμή, την επικρατούσα τιμή και την τυπική απόκλιση του αριθμού των παιδιών.
β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων
γ) Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων να εκτιμήσετε τα τρία τεταρτημόρια.

2. Ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών που βρέθηκαν στις 60 σελίδες ενός κειμένου στην πρώτη του διόρθωση ήταν:

3	4	5	2	6	7	2	2	3	4	5	6	7	4	0
6	4	0	0	2	3	1	1	4	5	4	3	3	7	6
4	3	2	1	0	1	2	3	3	3	4	4	5	6	8
3	9	3	1	0	4	4	5	5	6	6	7	8	9	5

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε ισοπλατείς κλάσεις πλάτους δύο και να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.
β) Να κατασκευάσετε τα ιστογράμματα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων και τα αντίστοιχα πολύγωνα συχνοτήτων.
γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την κορυφή και την τυπική απόκλιση.

3. Σε μια εταιρεία συνολικά εργάζονται 200 άτομα. Όπως προέκυψε από ένα τυχαίο δείγμα υπαλλήλων, ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας τους δίνεται στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα.



α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.
γ) Πόσοι συνολικά υπάλληλοι αναμένονται να συνταξιοδοτηθούν (συμπληρώνοντας 35-ετία) μέσα στα επόμενα i) 5 χρόνια, ii) 10 χρόνια;
δ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

4. Τα εργατικά ατυχήματα που συνέβησαν το 1990 και το 1994 δίνονται στο διπλανό πίνακα (Στοιχεία Υπουργείου Εργασίας).

Μήνες	1990	1994
Ιαν.-Φεβρ.	1057	692
Μαρ.-Απρ.	927	716
Μάιος-Ιούν.	1114	829
Ιουλ.-Αυγ.	1020	783
Σεπ.-Οκτ.	941	809
Νοεμ.-Δεκ.	775	636
Σύνολο	5834	4465

α) Να απεικονίσετε τα δεδομένα σε ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
β) Πόσα ατυχήματα συνέβησαν κατά μέσο όρο για τα έτη 1990 και 1994;
γ) Το 1,4% των ατυχημάτων του 1990 και το 2,1% του 1994 ήταν θανατηφόρα. Πόσα ατυχήματα ήταν θανατηφόρα για τα αντίστοιχα έτη; Ποιο είναι το συμπερασμά σας;

5. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τη διάρκεια ζωής δύο τύπων λυχνιών Α και Β σε χιλιάδες ώρες. Μια λυχνία τύπου Α στοιχίζει 23.000 δρχ.

A	B
12	12
14	13
23	16
30	22
36	32

α) Ποιον τύπου λυχνία θα προτιμήσετε, αν η μία λυχνία τύπου Β στοιχίζει:

i) 18.000 δρχ. ii) 19.000 δρχ. iii) 20.000 δρχ.

Να αιτιολογήσετε σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.
β) Ποιου τύπου οι λυχνίες παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια λειτουργίας τους;

6. Σε δειγματοληπτική έρευνα που έγινε στις 15 χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε.Ε.) μία βδομάδα πριν και μία βδομάδα μετά το Συμβούλιο Κορυφής, (Σ.Κ.) που έγινε το Μάιο του 1998, τα ποσοστά των ατόμων που αισθάνονταν πολύ καλά πληροφορημένα για το ενιαίο νόμισμα (ευρώ)

δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Χώρα	Πριν το Σ.Κ.	Μετά το Σ. Κ.	Χώρα	Πριν το Σ.Κ.	Μετά το Σ.Κ.
Αυστρία	50	47	Ισπανία	30	39
Βέλγιο	55	55	Ιταλία	49	39
Βρετανία	40	35	Λουξεμβούργο	56	62
Γαλλία	61	72	Ολλανδία	56	55
Γερμανία	44	48	Πορτογαλία	18	20
Δανία	51	53	Σουηδία	40	38
Ελλάδα	26	22	Φινλανδία	45	45
Ιρλανδία	41	29			

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε μορφή ραβδογράμματος.

β) Μα βρεθεί το μέσο ποσοστό των πολύ καλά ενημερωμένων για τις 15 χώρες της Ε.Ε. πριν και μετά το Σ.Κ., υπολογίζοντας i) τον αριθμητικό μέσο και ii) το σταθμικό μέσο ποσοστό με βάρη τους πληθυσμούς των 15 χωρών μελών της Ε.Ε. Ποιος από τους δύο μέσους είναι ο αντιπροσωπευτικότερος;

7. Στον παρακάτω πίνακα παριστάνονται οι χρόνοι (σε λεπτά και δευτερόλεπτα) των νικητών των Ολυμπιακών αγώνων στην κολύμβηση στα 400 μέτρα ελευθέρας (freestyle) ανδρών και γυναικών. Να δώσετε (για κάθε φύλο χωριστά) το χρονόγραμμα των δεδομένων αυτών. Τι συμπεράσματα βγάζετε;

Έτος	Χρόνος Ανδρών	Χρόνος Γυναικών	Έτος	Χρόνος Ανδρών	Χρόνος Γυναικών
1904	6:16.2	—	1956	4:27.3	4:54.6
1908	5:36.8	—	1960	4:18.3	4:50.6
1912	5:24.4	—	1964	4:12.2	4:43.3
1920	5:26.8	—	1968	4:09.0	4:31.8
1924	5:04.2	6:02.2	1972	4:00.3	4:19.4
1928	5:01.6	5:42.8	1976	3:51.9	4:09.9
1932	4:48.4	5:28.5	1980	3:51.3	4:08.8
1936	4:44.5	5:26.4	1984	3:51.2	4:07.1
1948	4:41.0	5:17.8	1988	3:47.0	4:03.9
1952	4:30.7	5:12.1	1992	3:45.0	4:07.2

Πηγή: The World Almanac and Book of Facts, 1994.

8. Οι κάτοικοι ανά km^2 από το 1960 έως και το 1974 στην Ελλάδα ήταν:

Κάτοικοι, Y	63	64	64	64	66	65	65	66	66	67	67	67	67	68	68
Έτος, X	1960	61	62	63	64	65	66	67	68	69	1970	71	72	73	74

α) Να εκτιμήσετε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y στη X, και να την παραστήσετε στο διάγραμμα διασποράς.

β) Το 1976 είχαμε 69,5 κατοίκους/ km^2 . Είναι αυτό αναμενόμενο;

(Υπόδειξη: Θεωρούμε ως έτος αναφοράς το 1960 με τιμή $x = 1$).

9. Ο συντελεστής γενικής θνησιμότητας (Σ.Γ.Θ.) της Ελλάδας για τα χρόνια 1931-1964 παρουσίασε την παρακάτω πορεία.

Έτος, X	1931	1936	1940	1950	1956	1961	1964
Σ.Γ.Θ.%, Y	17,7	15,1	12,8	7,9	7,4	7,6	8,2

α) Να χαράξετε "με το μάτι" την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$ στο διάγραμμα διασποράς και από την ευθεία αυτή να εκτιμήσετε το Σ.Γ.Θ. για το έτος 1965.

β) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δύο σημείων να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης και στη συνέχεια να εκτιμήσετε πάλι το Σ.Γ.Θ. για το έτος 1965. Συγκρίνετε με το προηγούμενο αποτέλεσμα.

γ) Να επαναλάβετε το ίδιο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Σημ. Για την ανεξάρτητη μεταβλητή X να θέσετε για το έτος 1931 ως τιμή το 1, οπότε για το 1936 το $x = 6$ και για το 1965 το 35.

10. Ο παρακάτω πίνακας δίνει το μηνιαίο εισόδημα X και τις αντίστοιχες δαπάνες διατροφής Y πέντε νοικοκυριών, που πάρθηκαν τυχαία από μια πολυκατοικία.

Εισόδημα ($\cdot 10^5$ δρχ), X	3,5	3,7	4,2	4,3	6,9
Δαπάνες διατροφής ($\cdot 10^5$ δρχ.), Y	1,1	1,5	1,8	1,5	2,5

α) Με τη μέθοδο των "ελαχίστων τετραγώνων" να βρείτε την εξίσωση της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης των εξόδων διατροφής (πάνω) στο εισόδημα.

β) Μια οικογένεια της πολυκατοικίας έχει μηνιαίο εισόδημα 500.000 δρχ. Πόσο εκτιμάτε εσείς ότι θα ξοδεύει για διατροφή το μήνα;

γ) Αν γνωρίζετε ότι μια οικογένεια ξοδεύει 300.000 δρχ. για διατροφή μπορείτε, με βάση τα παραπάνω, να προβλέψετε το μηνιαίο εισόδημά της;

11. Η ποσότητα $s_{xy} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ καλείται συνδιακύμανση των μεταβλητών X και Y. Αν καλέσουμε με s_x^2, s_y^2 τις διακυμάνσεις των X και Y αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$ β) $r = \hat{\beta}\frac{s_x}{s_y}$.

12. Ένας μαθητής γνώριζε ότι η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Φαρενάιτ (^{o}F)

με τους βαθμούς Κελσίου (^{o}C) είναι γραμμική, δηλαδή $F = \alpha + \beta C$. Επειδή όμως δε θυμότανε τις σταθερές *α*, *β*, μέτρησε τη θερμοκρασία του δωματίου του σε πέντε διαφορετικές ώρες με δύο θερμόμετρα με κλίμακα σε ^{o}F και ^{o}C, αντίστοιχα, και πήρε τα παρακάτω ζεύγη τιμών:

^{o}C	15	20	25	30	35
^{o}F	59	68	77	86	95

Να βρείτε τη σχέση $\hat{F} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} C$ που συνδέει τις δύο κλίμακες θερμοκρασίας.

13. Δίνεται δείγμα *ν* ζευγών $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_\nu, y_\nu)$ δύο μεταβλητών *X* και *Y* και έστω $r(X,Y)$ ο συντελεστής συσχέτισης. Εάν $Z = \lambda Y$ όπου *λ* θετική σταθερά, να δείξετε ότι ισχύει:

$$r(X, Z) = r(X, Y).$$

Τι γίνεται, εάν $\lambda < 0$;

14. Ο αριθμός των διαζυγίων που εκδόθηκαν στην Κύπρο από το 1974 έως το 1994 δίνεται παρακάτω (Πηγή: Τμήμα Στατιστικής και Ερευνών Κύπρου).

Έτος	*x*	Αριθμός Διαζυγίων *y*	Έτος	*x*	Αριθμός Διαζυγίων *y*
1974	1	140	1985	12	258
1975	2	121	1986	13	276
1976	3	110	1987	14	326
1977	4	136	1988	15	312
1978	5	158	1989	16	335
1979	6	161	1990	17	348
1980	7	164	1991	18	304
1981	8	175	1992	19	433
1982	9	216	1993	20	504
1983	10	262	1994	21	555
1984	11	250			
	Δίνονται: ν =21		Σx^2 =3.311		Σx =231
		Σy^2 =17.726.800	Σy =5.544		Σxy =75.512

Να βρείτε την ευθεία “ελαχίστων τετραγώνων” και να εκτιμήσετε τον αριθμό των διαζυγίων για τα έτη 1995, 2000.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Στις ερωτήσεις 1-10 να βάλετε σε κύκλο το Σ (Σωστό) ή το Λ (Λάθος).

1. Πάντοτε ένα μεγάλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα. Σ Λ

2. Όταν έχουμε συμμετρική κατανομή, η μέση τιμή συμπίπτει με τη διάμεσο. Σ Λ

3. Όταν έχουμε ακραίες παρατηρήσεις, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή αντί της διαμέσου. Σ Λ

4. Ο λόγος της μέσης τιμής προς την τυπική απόκλιση καλείται συντελεστής μεταβολής και είναι καθαρός αριθμός. Σ Λ

5. Όταν προσθέσουμε μια σταθερά στις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυξάνουν κατά τη σταθερά αυτή. Σ Λ

6. Όταν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές μιας μεταβλητής επί μια σταθερά, τότε η μέση τιμή πολλαπλασιάζεται επί την ίδια σταθερά. Σ Λ

7. Όταν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές μιας μεταβλητής επί μια σταθερά, τότε η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται επί την ίδια σταθερά. Σ Λ

8. Η διάμεσος και το δεύτερο τεταρτημόριο έχουν πάντα την ίδια τιμή. Σ Λ

9. Το βάρος της ζάχαρης που βάζουμε στους καφέδες είναι ποιοτική μεταβλητή, γιατί χαρακτηρίζει τον καφέ σκέτο, μέτριο ή γλυκύ. Σ Λ

10. Η σχετική συχνότητα μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Σ Λ

11. Για την ανεξάρτητη μεταβλητή οι παρατηρήσεις είτε προκαθορίζονται είτε λαμβάνονται χωρίς να υπεισέρχεται σφάλμα μέτρησης. Σ Λ

12. Η β παριστάνει την αύξηση της εξαρτημένης μεταβλητής, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή αυξηθεί κατά μία μονάδα. Σ Λ

13. Ένας συντελεστής συσχέτισης $r = +0{,}6$ δείχνει μεγαλύτερη γραμμική συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών παρά ο $r = -0{,}9$. Σ Λ

14. Όταν $r(X,Y)>0$, τότε συνεπάγεται ότι οι μεταβλητές *X, Y* είναι θετικά

συσχετισμένες. Σ Λ

Στις ερωτήσεις 15-24 να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

15. Ένα μέτρο που χρησιμοποιείται τόσο για ποιοτικά όσο και για ποσοτικά δεδομένα είναι:

Α. η μέση τιμή
Β. η επικρατούσα τιμή
Γ. η τυπική απόκλιση
Δ. κανένα από τα παραπάνω.

16. Η διακύμανση των παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$ δίνεται από τον τύπο:

Α. $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum(x_i - \bar{x})$
Β. $s^2 = \nu\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$
Γ. $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right\}$
Δ. $s^2 = \frac{\nu\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{\nu^2}$

17. Εάν οι συντελεστές μεταβολής δύο συνόλων δεδομένων *A* και *B* είναι 15% και 20% αντιστοίχως, τότε:

Α: τα δεδομένα A παρουσιάζουν μεταλύτερη ομοιογένεια από τα B
Β: τα δεδομένα A παρουσιάζουν μικρότερη ομοιογένεια από τα B
Γ: τα δεδομένα A παρουσιάζουν μεταλύτερη διασπορά από τα B
Δ: τα δεδομένα A παρουσιάζουν μικρότερη διασπορά από τα B

18. Με βάση την ευθεία παλινδρόμησης $y = -10 + 3{,}25x$ η προβλεπόμενη τιμή y για $x = 10$ είναι:

Α. 3,25
Β. -10
Γ. 22,5
Δ. Δεν μπορούμε να ξέρουμε.

19. Με βάση την ευθεία παλινδρόμησης $y = 2 - 3x$ ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των *X*, *Y* είναι:

Α. -3
Β. Θετικός
Γ. Αρνητικός
Δ. $-3/2$.

20. Εάν ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών *X*, *Y* είναι $r = +1$, τότε η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της *Y* στη *X* μπορεί να διέρχεται από τα σημεία:

Α. $(0,0)$ και $(1,-1)$
Β. $(-1,1)$ και $(1,0)$
Γ. $(-1,-1)$ και $(1,1)$
Δ. $(0,1)$ και $(1,0)$.

21. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r και ο συντελεστής β στην ευθεία

γραμμικής παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$ έχουν:

Α. πάντα το ίδιο πρόσημο
Β. πάντα διαφορετικό πρόσημο
Γ. άλλοτε το ίδιο πρόσημο και άλλοτε διαφορετικό
Δ. δεν έχουν καμιά σχέση ως προς το πρόσημό τους.

22. Εάν $r(X,Y) = 0$, τότε οι *X, Y* είναι:

Α. ασυσχέτιστες
Β. γραμμικά ασυσχέτιστες
Γ. τέλεια θετικά συσχετισμένες
Δ. τέλεια αρνητικά συσχετισμένες.

23. Στην παλινδρόμηση με y συμβολίζουμε:

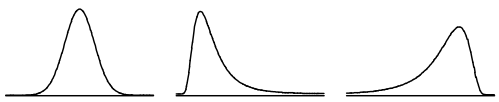
Α. τις πραγματικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής
Β. τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής
Γ. τις προβλεπόμενες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής, που προκύπτουν από την εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης
Δ. κανένα από τα παραπάνω.

24. Οι μεταβλητές *X, Y* έχουν συντελεστή συσχέτισης $r_1 = +0{,}9$, ενώ οι *Z, W* έχουν συντελεστή συσχέτισης $r_2 = +0{,}3$.

Α. Οι *X, Y* είναι τριπλάσια συσχετισμένες από τις *Z, W*
Β. Οι *X, Y* είναι περισσότερο (σε μεγαλύτερο βαθμό) συσχετισμένες από τις *Z, W*
Γ. Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε διαφορετικές μεταβλητές.

Στις ερωτήσεις 25-35 να γίνει αντιστοίχιση των (α), (β)… με τα (i), (ii), … , όπου αυτή είναι δυνατή.

25.



(α) (β) (γ)

i) $\bar{x} = \delta$ ii) $\bar{x} < \delta$ iii) $\bar{x} > \delta$

26. α) 1 2 10 18 19

i) $\bar{x} = 10$, $s \approx 7{,}5$
ii) $\bar{x} = 20$, $s \approx 7{,}5$

β) 18 19 20 21 22 • • iii) $\bar{x} = 10$, $s \approx 1{,}4$
• iv) $\bar{x} = 20$, $s \approx 1{,}4$

γ) 8 9 10 11 12 • • v) $\bar{x} = 15$, $s \approx \sqrt{2}$.

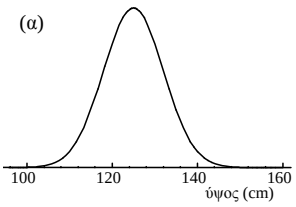
27. α) διάμεσος •
β) επικρατούσα τιμή • • i) μέτρο θέσης
γ) τυπική απόκλιση •
δ) εύρος • • ii) μέτρο διασποράς
ε) διακύμανση •
στ) μέση τιμή •

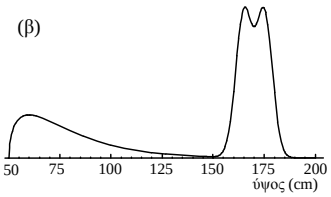
28. α) 5 7 8 10 13 24 • • i) $\bar{x} = 9$
β) 1 2 8 9 9 25 • • ii) $\delta = 9$
γ) 1 2 9 12 12 18 • • iii) $M_0 = 9$

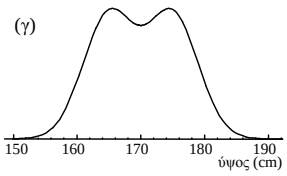
29. α) 10 11 12 13 14 • • i) $\bar{x} < \delta$
β) 10 11 12 13 24 •
γ) 1 11 12 13 14 • • ii) $\bar{x} = \delta$
δ) 20 21 22 23 24 •
ε) 30 33 36 39 42 • • iii) $\bar{x} > \delta$

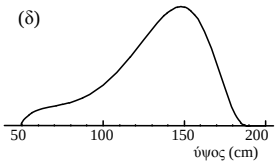
30. Παρακάτω δίνονται οι καμπύλες συχνοτήτων (α) έως (δ) τεσσάρων μεταβλητών (i) έως (iv) από μια μελέτη που έγινε σε κάποια πόλη.

i) Ύψος των μελών των νοικοκυριών στα οποία οι γονείς είναι και οι δύο κάτω των 24 ετών.
ii) Ύψος των παντρεμένων ζευγαριών.
iii) Ύψος όλων των ατόμων.
iv) Ύψος όλων των αυτοκινήτων.

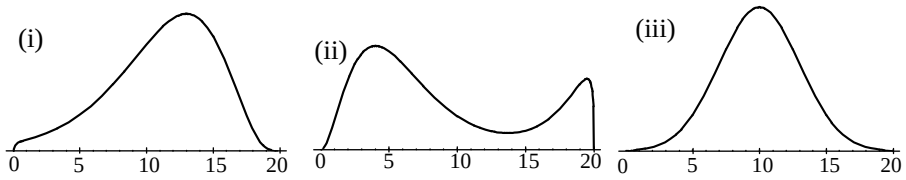




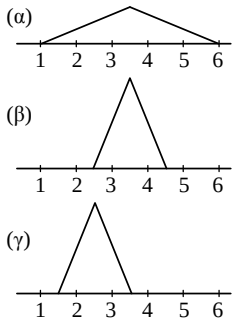




31. Παρακάτω δίνονται οι καμπύλες σχετικών συχνοτήτων ((i) έως (iii)) της βαθμολογίας τριών τμημάτων σε ένα διαγώνισμα, κατά το οποίο
α) στο πρώτο τμήμα πέρασε το 50%
β) Στο δεύτερο τμήμα πέρασε ποσοστό άνω του 50%
γ) Στο τρίτο τμήμα πέρασε ποσοστό κάτω του 50%.



32. Παρακάτω δίνονται κατά προσέγγιση οι καμπύλες συχνοτήτων (α) έως (γ) τριών διαφορετικών συνόλων δεδομένων και διάφορες τιμές (i) έως (iv) της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης:



(i) $\bar{x} \approx 3,5$, $s \approx 1$

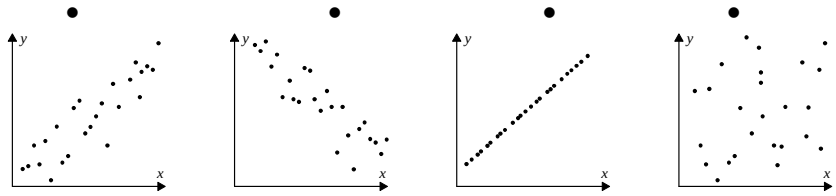
(ii) $\bar{x} \approx 3,5$, $s \approx 2$

(iii) $\bar{x} \approx 2,5$, $s \approx 1$

(iv) $\bar{x} \approx 2,5$, $s \approx 2$.

33.

(α) $r \approx 0$ (β) $r \approx 0.8$ (γ) $r = +1$ (δ) $r \approx -0.8$



(i) (ii) (iii) (iv)

34.

$r = 0$ • • $\beta = 0$

$r > 0$ • • $\beta < 0$

$r < 0$ • • $\beta > 0$.

35. Για την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης $y = 2x$ ισχύει:

$\alpha = 0$ •

$r > 0$ • • Σωστό

$\beta = 2$ • • Λάθος

$r = \beta$ • • Δεν μπορούμε να ξέρουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. Ποιοτικές: γ, δ, $\sigma\tau$, ζ
Ποσοτικές - διακριτές: β, η, θ, ι
Ποσοτικές - συνεχείς: α, ε

2. α) Μισθός (ποσοτική), ηλικία (διακριτή), φύλο (ποιοτική),ικανοποίηση από τη δουλειά (ποιοτική), κτλ.
β) Βάρος (ποσοτική), ποιότητα (ποιοτική), κτλ.
γ) Χρόνος παρακολούθησης τηλεόρασης (ποσοτική), σταθμός προτίμησης (ποιοτική) κτλ.
δ) Χρόνος συμμετοχής (ποσοτική-συνεχής), αριθμός πόντων (ποσοτική-διακριτή), κτλ.

3. (ε). Πρέπει το δείγμα να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. Επομένως πρέπει να πάρουμε άτομα (των δύο φύλων και διαφόρων ηλικιών) από διάφορες περιοχές του πληθυσμού για τον οποίο αναφερόμαστε.

4. α) Με το σχέδιο αυτό θα έχουμε υπερεκτίμηση του αριθμού των ανδρών.
β) Πιθανόν να έχουν τις ίδιες πολιτικές πεποιθήσεις.
γ) Θα έχουμε υπερκτίμηση του εισοδήματος.
δ) Νέοι δεν είναι μόνο οι μαθητές Λυκείου. Ελλάδα δεν είναι μόνο η Αττική.
ε) Οι λόγοι απουσίας των μαθητών διαφέρουν κατά τη διάρκεια του έτους. Το Νοέμβριο μπορεί να απουσιάζουν λόγω κρυολογήματος, το Μάϊο λόγω συμμετοχής σε εξετάσεις.

2.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Παριστάνουμε με X τη βαθμολογία των φοιτητών. Ο πίνακας κατανομής των συχνοτήτων και των σχετικών συχνοτήτων της μεταβλητής X *είναι* ο εξής:

Βαθμολογία x_i	Διαλογή	Συχνότ. ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστ. συχνότητα N_i	Αθρ. Σχετ. Συχν. $F_i\%$
1	|||	3	6	3	6
2	||	2	4	5	10
3	~~||||~~	5	10	10	20
4	|||	3	6	13	26
5	~~||||~~ ||	7	14	20	40
6	~~||||~~ ||||	9	18	29	58
7	~~||||~~ ||	7	14	36	72
8	~~||||~~ ||	7	14	43	86
9	~~||||~~	5	10	48	96
10	||	2	4	50	100
Σύνολο	—	50	100	—	—

β) i) Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι από τους 50 φοιτητές 13 έχουν βαθμό κάτω από τη βάση. Άρα για $X \le 4$ το αντίστοιχο ποσοστό είναι $13/50 = 0{,}26 = 26\%$ (βλ. τελευταία στήλη $F_i\%$).

ii) Για $X \ge 9$ το αντίστοιχο ποσοστό είναι $(5+2)/50 = 7/50 = 0{,}14 = 14\%$.

Ισοδύναμα από την τελευταία στήλη το ποσοστό είναι $100\% - 86\% = 14\%$.

iii) Ομοίως, για $7 \le X \le 9$ έχουμε τους φοιτητές με βαθμό 7,8 ή 9.

Συνεπώς το αντίστοιχο ποσοστό είναι

$$(7+7+5)/50 = 19/50 = 0{,}38 = 38\%.$$

Ισοδύναμα από την τελευταία στήλη το ποσοστό αυτό είναι $96\% - 58\% = 38\%$.

2.

	Βαθμολογία		
Φύλο	≤ 5	> 5	Σύνολο
Α	11	18	29
Κ	9	12	21
Σύνολο	20	30	50

3. α) Διαιρούμε τις συχνότητες των "κελλιών" του πίνακα της άσκησης 2 με το συνολικό αριθμό φοιτητών $\nu = 50$.

Φύλο	**Βαθμολογία**		Σύνολο
	≤ 5	>5	
Α	11/50=22%	36%	58%
Κ	18%	24%	42%
Σύνολο	40%	60%	100%

Δηλαδή το 22% των **φοιτητών** είναι αγόρια με βαθμό ≤ 5, κτλ.

β) Διαιρούμε τις συχνότητες των "κελλιών" κάθε γραμμής με το αντίστοιχο σύνολο της γραμμής.

Φύλο	Βαθμολογία		Σύνολο
	≤ 5	> 5	
Α	11/29=37,93%	62,07%	100%
Κ	42,86%	57,14%	100%
Σύνολο	—	—	—

Δηλαδή το 37,93% των **αγοριών** έχουν βαθμό ≤ 5, κτλ.

γ) Διαιρούμε τις συχνότητες των "κελλιών" κάθε στήλης με το αντίστοιχο σύνολο της στήλης.

Φύλο	Βαθμολογία		Σύνολο
	≤ 5	>5	
Α	11/20=55%	60%	—
Κ	45%	40%	—
Σύνολο	100%	100%	—

Δηλαδή το 55% των φοιτητών με **βαθμό** ≤ 5 είναι αγόρια, κτλ..

4. Παριστάνουμε με X τις ημέρες απουσίας:

α) Είναι $X \geq 1$. Άρα έχουμε $8+5+4+5+8+0+5+2+1=38$ εργάτες, δηλαδή το $38/50=0,76=76\%$ των εργατών απουσίασαν τουλάχιστον μια ημέρα. Ισοδύναμα αυτό μπορεί να βρεθεί αν από τους 50 εργάτες αφαιρέσουμε τους 12 που δεν απουσίασαν ποτέ από την εργασία τους.

β) Είναι $X > 5$. Άρα έχουμε $0+5+2+1=8$ εργάτες, δηλαδή $8/50=0,16=16\%$.

γ) Είναι $3 \leq X \leq 5$. Άρα έχουμε $4+5+8=17$ εργάτες, δηλαδή $17/50=0,34=34\%$.

δ) Είναι $X \leq 5$. Άρα έχουμε $12+8+5+4+5+8=42$ εργάτες, δηλαδή $42/50=0,84=84\%$.

ε) Είναι $X=5$. Άρα έχουμε 8 εργάτες, δηλαδή $8/50=0,16=16\%$.

5. Ακολουθούμε, για παράδειγμα, τα παρακάτω βήματα:

α) $v=\dfrac{v_2}{f_2}=\dfrac{4}{0,20}=20$

β) $N_1=N_2-v_2=6-4=2=v_1$

γ) $f_3=F_3-F_2=0,60-0,30=0,30$.

δ) $f_4=\dfrac{f_4\%}{100}=\dfrac{25}{100}=0,25$

ε) $v_6=v-N_5=20-19=1$

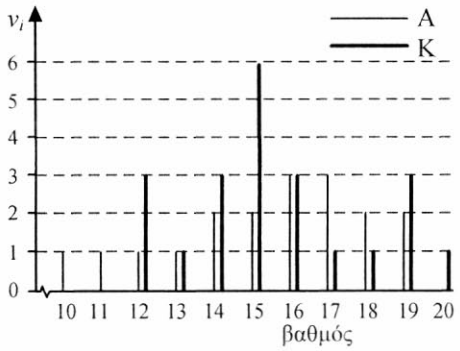
Επομένως ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	f_i%	F_i%
1	2	0,10	2	0,10	10	10
2	4	0,20	6	0,30	20	30
3	6	0,30	12	0,60	30	60
4	5	0,25	17	0,85	25	85
5	2	0,10	19	0,95	10	95
6	1	0,05	20	1,00	5	100
Σύνολο	20	1,00	—	—	100	—

6. Αν εργαστούμε όπως στον πίνακα 5 έχουμε τον πίνακα συχνοτήτων του βαθμού στα Μαθηματικά για τα αγόρια και τα κορίτσια:

Βαθμός στα Μαθηματικά, x_i	**Αγόρια**		**Κορίτσια**	
	Διαλογή	v_A	Διαλογή	v_K
10	|	1		0
11	|	1		0
12	|	1	|||	3
13	|	1	|	1
14	||	2	|||	3
15	||	2	~~||||~~ |	6
16	|||	3	|||	3
17	|||	3	|	1
18	||	2	|	1
19	||	2	|||	3
20		0	|	1
Σύνολο	—	18	—	22

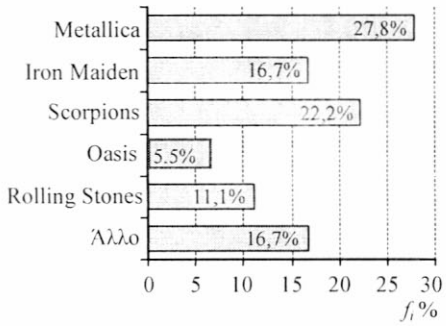
Επομένως το αντίστοιχο διάγραμμα συχνοτήτων είναι:



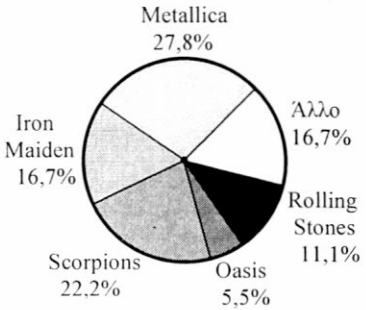
7. Κατασκευάζουμε πρώτα τον πίνακα συχνοτήτων:

Μουσικό συγκρότημα, x_i	ν_i	$f_i\%$
Metallica	5	27,8
Iron Maiden	3	16,7
Scorpions	4	22,2
Oasis	1	5,5
Rolling Stones	2	11,1
Άλλο	3	16,7
Σύνολο	18	100,0

α) Επομένως το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων είναι:



β) Το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων είναι:



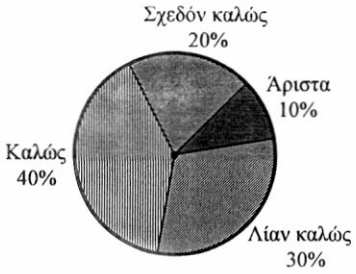
8. Αν $\nu = 450$ το πλήθος των μαθητών, ν_i, i = 1,2,3,4 οι συχνότητες, f_i οι σχετικές συχνότητες και a_i, $i = 1,2,3,4$ τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος για τις τέσσερις κατηγορίες Άριστα, Λίαν Καλώς, Καλώς και Σχεδόν Καλώς, αντιστοίχως, θα έχουμε $\nu_2 = f_2 \cdot \nu = 0{,}30 \cdot 450 = 135$ και $\nu_3 = \frac{\alpha_3 \cdot \nu}{360^\circ} = \frac{144^\circ \cdot 450}{360^\circ} = 180$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τη συχνότητα ν_1 της τιμής x_1 = "Άριστα", χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\nu_4 = 2\nu_1$:

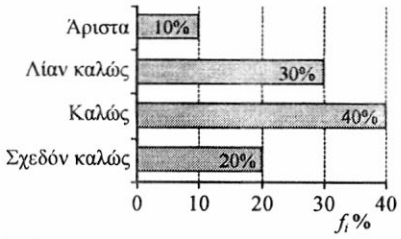
$$\nu_1 + 135 + 180 + \nu_4 = 450 \Leftrightarrow \nu_1 + 135 + 180 + 2\nu_1 = 450$$
$$\Leftrightarrow \nu_1 = (450 - 135 - 180)/3 = 45.$$

Άρα και $\nu_4 = 90$. Έτσι ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

i	x_i	ν_i	$f_i\%$	$a_i = \frac{360\nu_i}{\nu}$
1	Άριστα	45	10	36
2	Λίαν Καλώς	135	30	108
3	Καλώς	180	40	144
4	Σχεδόν Καλώς	90	20	72
	Σύνολο	ν=450	100	360

Οπότε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα και το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων είναι:



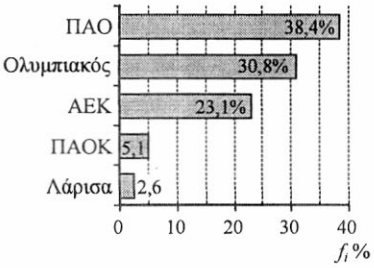


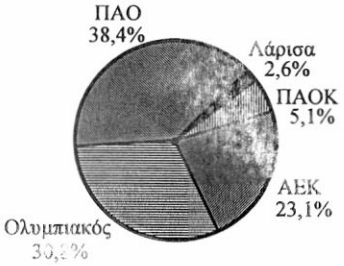
Τουλάχιστον λίαν καλώς έχει το 40%, δηλαδή 180 μαθητές.

9. Κατασκευάζουμε πρώτα τον πίνακα συχνοτήτων:

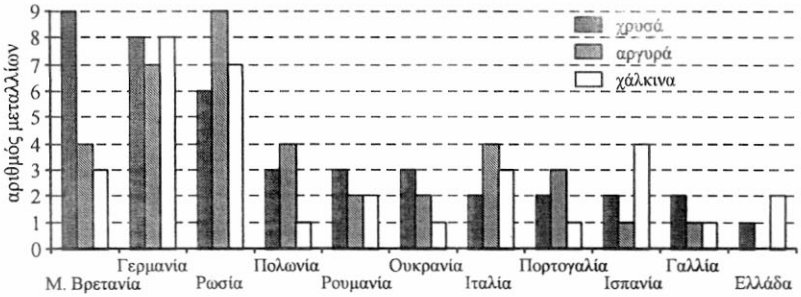
Ομάδα	ν_i	f_i%
ΑΕΚ	9	23,1
Λάρισα	1	2,6
Ολυμπιακός	12	30,8
ΠΑΟ	15	38,4
ΠΑΟΚ	2	5,1
Σύνολο	39	100,0

Συνεπώς το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων είναι:

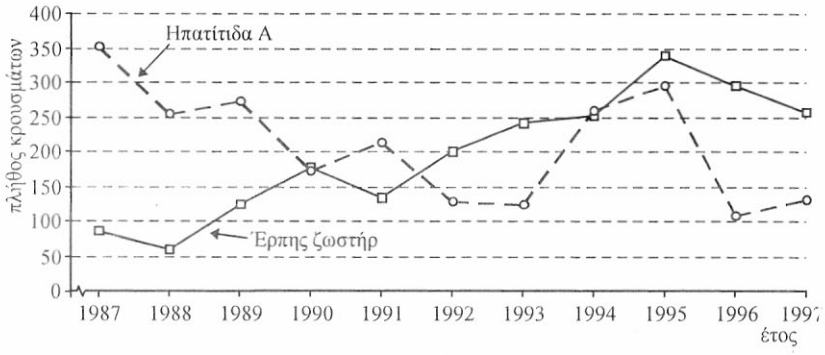




10. Εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα στο σχήμα 1(γ):



11. Τα χρονογράμματα των δύο λοιμωδών νόσων δίνονται παρακάτω:

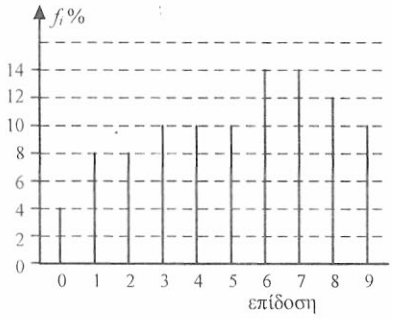


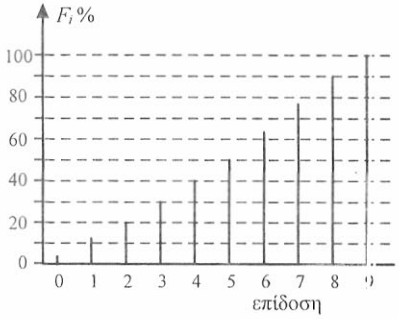
Έρπης ζωστήρ: Έχουμε ανοδική τάση μέχρι το 1995 και μετά ελαφρά πτώση.
Ηπατίδιδα Α : Έχουμε καθοδική τάση μέχρι το 1993, σημαντική αύξηση τα έτη 1994 και 1995 και μετά πτώση στα επίπεδα του 1992-93.

12. α) Ο πίνακας συχνοτήτων της επίδοσης Χ των 50 υποψηφίων είναι:

x_i	Διαλογή	ν_i	f_i%	N_i	F_i%
0	||	2	4	2	4
1	||||	4	8	6	12
2	||||	4	8	10	20
3	~~||||~~	5	10	15	30
4	~~||||~~	5	10	20	40
5	~~||||~~	5	10	25	50
6	~~||||~~ ||	7	14	32	64
7	~~||||~~ ||	7	14	39	78
8	~~||||~~ |	6	12	45	90
9	~~||||~~	5	10	50	100
Σύνολο	—	50	100	—	—

β) Τα διαγράμματα σχετικών και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων είναι:





γ) Θέλουμε επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 8, $X \geq 8$. Άρα η σχολή θα πάρει $6+5=11$ άτομα, δηλαδή το 22% των υποψηφίων.

δ) Αφού η σχολή θα πάρει το 36% των υποψηφίων σημαίνει ότι το 64% των υποψηφίων δεν θα επιλεγούν, δηλαδή όσοι έχουν επίδοση μικρότερη ή ίση του 6. Άρα θα επιλεγούν όσοι έχουν επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 7.

13. Επειδή στον κατακόρυφο άξονα έχουμε το ποσοστό του εισοδήματος ανά χιλιάδες ευρώ, έχουμε:

$$y^{*} = \frac{f\%}{c} \Leftrightarrow f\% = y^{*} \cdot c = 10 \cdot (20-15) = 10 \cdot 5 = 50\%$$

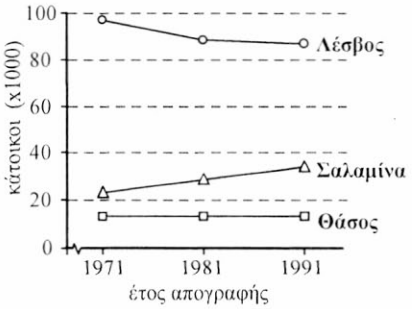
Άρα το 50% των οικογενειών της περιοχής έχουν εισόδημα από 15 έως 20 χιλιάδες ευρώ.

14. Πρέπει το εμβαδόν του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων να είναι 100 (τοις εκατό). Όμως αυτό που έκανε ο μαθητής είναι περίπου ένα τρίγωνο με βάση $(190-150)=40$ και ύψος 10. Άρα έχει εμβαδόν $(40 \cdot 10)/2 = 200$. Συνεπώς είχε δίκιο ο καθηγητής.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Παρατηρούμε ότι:

- Για τη Λέσβο υπάρχει πτωτική τάση.
- Για τη Θάσο υπάρχει περίπου σταθερή κατάσταση.
- Για τη Σαλαμίνα υπάρχει ανοδική τάση.



2. Οι βεβαιωθέντες θάνατοι από χρήση ναρκωτικών για τα έτη 1988-98 αναφορικά με την ηλικιακή ομάδα είναι:

Έτος	Ηλικία			Σύνολο
	≤ 20	21 - 30	≥ 31	
1988	7	43	12	62
1989	4	51	17	72
1990	2	34	30	66
1991	2	44	33	79
1992	1	47	31	79
1993	4	49	25	78
1994	8	71	67	146
1995	7	90	79	176
1996	14	98	110	222
1997	22	99	101	222
1998*	6	33	26	65

*Μέχρι 8 Απριλίου. Πηγή: ΟΚΑΝΑ

3. Οι βεβαιωθέντες θάνατοι από χρήση ναρκωτικών για τα έτη 1988-98 αναφορικά με το φύλο είναι:

Έτος	Φύλο		Σύνολο
	Γυναίκες	Άνδρες	
1988	8	54	62
1989	10	62	72
1990	7	59	66
1991	5	74	79
1992	9	70	79
1993	8	70	78
1994	11	135	146
1995	14	162	176
1996	20	202	222
1997	20	202	222
1998*	9	56	65

* Μέχρι 8 Απριλίου. Πηγή: ΟΚΑΝΑ

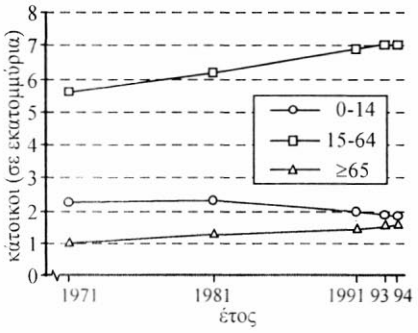
4. α) Παρατηρούμε ότι ολοένα και περισσότερο το ποσοστό των πτυχιούχων γυναικών Μαθηματικών πλησιάζει σημαντικά το αντίστοιχο ποσοστό των ανδρών. Ενώ δηλαδή το 1930 ο λόγος ανδρών-γυναικών Μαθηματικών ήταν 90% προς 10% το 1995 ο λόγος αυτός έγινε 55% προς 45%, αντίστοιχα.

β) Γυναίκες $= 45\% \cdot 789 \cong 355$ Άνδρες $= 55\% \cdot 789 \cong 434$.

γ) Το ποσοστό των πτυχιούχων γυναικών το 1974 ήταν 20% και εφόσον αυτές ήταν 173 συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των πτυχιούχων ήταν $(173 \cdot 100)/20 = 865$. Άρα οι άνδρες ήταν 692 (ποσοστό 80%).

δ) Γνωρίζουμε μόνο τα αντίστοιχα ποσοστά, άρα δεν μπορούμε να ξέρουμε τον αριθμό ανδρών και γυναικών που πήραν πτυχίο Μαθηματικού το έτος αυτό.

5. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των παιδιών από 0-14 ετών μειώνεται σημαντικά ενώ αυξάνει ο αριθμός των ηλικιωμένων (≥ 65 ετών) και των ατόμων μεταξύ 15 και 64 ετών.

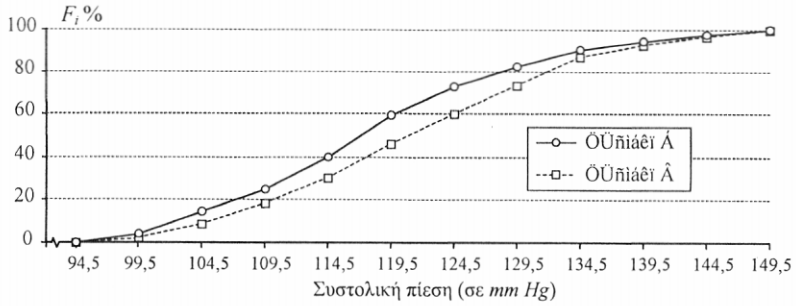


6. α) Φάρμακο Α: $(12+6+5+3)/150 = \dfrac{26}{150} \approx 0{,}173 \approx 17{,}3\%$.

Φάρμακο Β: $(26+12+8+6)/200 = \dfrac{52}{200} = 0{,}26 = 26\%$.

β) Επειδή η μεταβλητή "συστολική πίεση" είναι συνεχής η ομαδοποίηση σε κλάσεις της μορφής [,) είναι: 94,5 – 99,5 99,5 – 104,5 κτλ.

Επομένως τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για τη συστολική πίεση των γυναικών που λαμβάνουν τα φάρμακα Α και Β είναι:



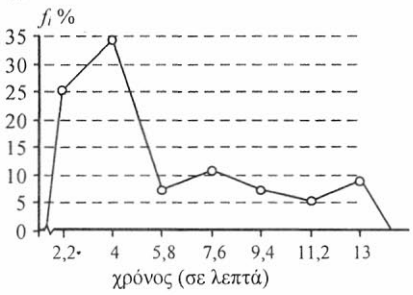
Παρατηρούμε ότι η συστολική πίεση των γυναικών που παίρνουν το φάρμακο Β είναι εν γένει μεγαλύτερη από ότι των γυναικών που παίρνουν το φάρμακο Α. Για παράδειγμα, το 40% των γυναικών που παίρνουν το φάρμακο Α έχουν συστολική πίεση μεγαλύτερη των 119,5 mm Hg, ενώ το ίδιο ποσοστό γυναικών που παίρνουν το φάρμακο Β έχουν συστολική πίεση μεγαλύτερη των 124,5 mm Hg. Με τα δεδομένα αυτά όμως δεν μπορούμε να ξέρουμε αν το φάρμακο Β προκαλεί την αύξηση της πίεσης ή οι γυναίκες με υψηλή πίεση παίρνουν το φάρμακο Β.

7. α) Επειδή $\nu = 55$ χρησιμοποιούμε $\kappa = 7$ ισοπλατείς κλάσεις. Το εύρος είναι $R = 13{,}8 - 1{,}3 = 12{,}5$ συνεπώς το πλάτος των κλάσεων είναι $c = \dfrac{R}{\kappa} = \dfrac{12{,}5}{7} = 1{,}786 \approx 1{,}8$.

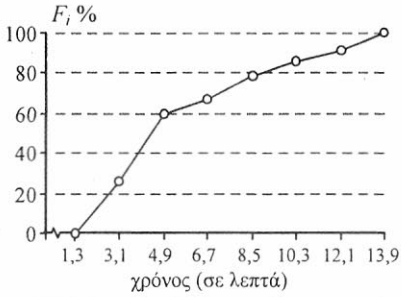
β) Ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

Κλάσεις [–)	Διαλογή	ν_i	f_i%	N_i	F_i%	x_i
1,3-3,1	卌 卌 ||||	14	25,5	14	25,5	2,2
3,1-4,9	卌 卌 卌 ||||	19	34,5	33	60,0	4,0
4,9-6,7	||||	4	7,3	37	67,3	5,8
6,7-8,5	卌 |	6	10,9	43	78,2	7,6
8,5-10,3	||||	4	7,3	47	85,5	9,4
10,3-12,1	|||	3	5,4	50	90,9	11,2
12,1-13,9	卌	5	9,1	55	100,0	13,0
Σύνολο:		55	100,0	—	—	—

γ)



Πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.



Πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

2.3 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν x είναι ο πρώτος άρτιος, τότε οι ζητούμενοι άρτιοι αριθμοί θα είναι:

$$x \quad x+2 \quad x+4 \quad x+6 \quad x+8 \quad x+10 .$$

Επειδή η μέση τιμή τους είναι ίση με 15 έχουμε

$$\frac{x+x+2+x+4+x+6+x+8+x+10}{6}=15 \Leftrightarrow \frac{6x+30}{6}=15 \Leftrightarrow x=10$$

Άρα οι αριθμοί είναι οι: 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Η διάμεσός τους είναι η $\delta=\frac{14+16}{2}=15$.

2. α) Ναι, όταν και οι δέκα τιμές είναι ίσες με 1.

β) Όχι, η μέση τιμή είναι πάντα ανάμεσα στη μικρότερη και τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

γ) Ναι, για παράδειγμα οι τιμές: 1 1 1 1 1 1 3 3 3 3.

3. $\bar{x}=\frac{5+16-10+0+27+14-20+34}{8}=\frac{66}{8}=8{,}25\%$.

4. α) $\bar{x}=\frac{9\cdot 205+216}{10}=\frac{1845+216}{10}=206{,}1\,\text{cm}$.

β) $\frac{9\cdot 205+x}{10}=208 \Leftrightarrow x=235\,\text{cm}$.

5. Αν παραστήσουμε με Χ την ηλικία των μαθητών, τότε έχουμε τα παρακάτω δεδομένα:

$$\nu_A = 18\,,\ \nu_K = 12\,,\ \nu = \nu_A + \nu_K = 30\,,\ \bar{x}_A = 15{,}8\,,\ \bar{x} = 15{,}4\,.$$

Αν $\bar{x}_K$ είναι η μέση ηλικία των κοριτσιών, τότε θα είναι $\bar{x} = \dfrac{\nu_A \bar{x}_A + \nu_K \bar{x}_K}{\nu_A + \nu_K}$,

οπότε αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχουμε:

$$15{,}4 = \frac{18 \cdot 15{,}8 + 12\bar{x}_K}{30} \Leftrightarrow \bar{x}_K = 14{,}8\,.$$

6. α) Έχουμε 1Α, 2Μ, 3Κ και 4Π μπάλες. Αν παραστήσουμε με Χ το βάρος (σε gr) για τις μπάλες διαφορετικού χρώματος, θα έχουμε τις τιμές 10, 11, 12 και 13 για τις άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες, αντίστοιχα, με συχνότητες όπως δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Α	10%	10gr
Μ	20%	11gr
Κ	30%	12gr
Π	40%	13gr

x_i	ν_i	f_i
10	1	0,10
11	2	0,20
12	3	0,30
13	4	0,40
Σύνολο	10	1,00

Άρα

$$\bar{x} = \frac{10 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 13}{10} = \frac{120}{10} = 12\,\text{gr}$$

$$\delta = \frac{12 + 12}{2} = 12\,\text{gr}$$

$$M_0 = 13\,\text{gr}\,.$$

β) Έχουμε 2Α, 4Μ, 6Κ και 8Π μπάλες. Αν εργαστούμε όπως στην προηγούμενη περίπτωση , ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

x_i	ν_i	f_i
10	2	0,10
11	4	0,20
12	6	0,30
13	8	0,40
Σύνολο	20	1,00

Άρα

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 10 + 4 \cdot 11 + 6 \cdot 12 + 8 \cdot 13}{20} = 12\,\text{gr}$$

$$\delta = \frac{12 + 12}{2} = 12\,\text{gr} \quad \text{και}$$

$$M_0 = 13\,\text{gr}\,.$$

γ) $\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 10 \cdot 0{,}10 + 11 \cdot 0{,}20 + 12 \cdot 0{,}30 + 13 \cdot 0{,}40 = 12\,\text{gr}$

Οι μισές από τις μπάλες έχουν βάρος μικρότερο των 12 gr και οι άλλες μισές μεγαλύτερο των 12gr, άρα $\delta = 12\,\text{gr}$.

7. α) Ο αριθμητικός μέσος είναι

$$\bar{x} = \frac{12+10+16+18+14}{5} = 14$$

β) Ο σταθμικός μέσος είναι

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 12+3\cdot 10+1\cdot 16+1\cdot 18+3\cdot 14}{2+3+1+1+3} = \frac{130}{10} = 13\,.$$

Για να μεγαλώσει ο σταθμικός μέσος πρέπει να έχει μεγάλους βαθμούς στα μαθήματα που έχουν και μεγαλύτερους συντελεστές. Έπρεπε λοιπόν ο μαθητής να δώσει ιδιαίτερη προσοχή στα μαθήματα με τους συντελεστές στάθμισης 3.

8. Είναι $\bar{x}_A = 1249$ ευρώ, $\bar{x}_B = 1280$ ευρώ και $\bar{x}_\Gamma = 1360$ ευρώ.
Άρα

$$\bar{x}_{\text{ο/}} = \frac{5\cdot 1249+6\cdot 1280+4\cdot 1360}{5+6+4} = \frac{13365}{15} = 1291 \text{ ευρώ.}$$

9. Εφόσον οι αριθμοί είναι πέντε, η διάμεσος θα είναι ο μεσαίος αριθμός. Επειδή όμως δ=6 προκύπτει ότι ένας από τους αριθμούς που ζητούμε είναι το 6. Επειδή όμως η μέση τιμή είναι επίσης 6, αν x είναι ο πέμπτος αριθμός θα έχουμε: $\dfrac{5+6+8+9+x}{5} = 6 \Leftrightarrow x = 2\,.$

Επομένως οι άλλοι δύο αριθμοί είναι οι 2 και 6.

10. α) $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{\sum v_i} \Leftrightarrow 4{,}4 = \dfrac{2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot v_5+7\cdot 1}{1+3+1+2+v_5+1}$

$$\Leftrightarrow 4{,}4(8+v_5) = 6v_5+32 \Leftrightarrow v_5 = 2\,.$$

β) Οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι:

2 3 3 3 4 5 5 . . . 7.

Επειδή η $\delta = 4{,}5 = \dfrac{4+5}{2}$, όσες τιμές έχουμε αριστερά της (δηλαδή 5) άλλες τόσες θα έχουμε προς τα δεξιά της. Άρα πρέπει να έχουμε ακόμη δύο 6. Συνεπώς $v_5 = 2$.

γ) Για να έχουμε δύο επικρατούσες τιμές πρέπει το $v_5 = 3$, οπότε οι επικρατούσες τιμές θα είναι το 3 και το 6.

11. Ο πίνακας συχνοτήτων της μεταβλητής Χ που παριστά τον βαθμό στα Μαθηματικά των 40 μαθητών του πίνακα 4, είναι:

x_i	v_i	$x_i\ v_i$	N_i
10	1	10	1
11	1	11	2
12	4	48	6
13	2	26	8
14	5	70	13
15	8	120	21
16	6	96	27
17	4	68	31
18	3	54	34
19	5	95	39
20	1	20	40
Σύνολο	40	618	—

Επομένως

α) $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{\sum v_i} = \dfrac{618}{40} = 15{,}45$

β) $\delta = \dfrac{20\text{ή παρ.} + 21\text{η παρ.}}{2} = \dfrac{15+15}{2} = 15$,

δηλαδή το πολύ 50% των μαθητών και μαθητριών έχουν βαθμό στα Μαθηματικά κάτω από 15 και το πολύ 50% πάνω από 15.

γ) $M_0 = 15$

δ) $Q_1 = \dfrac{10\text{η παρ.} + 11\text{η παρ.}}{2} = \dfrac{14+14}{2} = 14$

$Q_3 = \dfrac{30\text{ή παρ.} + 31\text{η παρ.}}{2} = \dfrac{17+17}{2} = 17$.

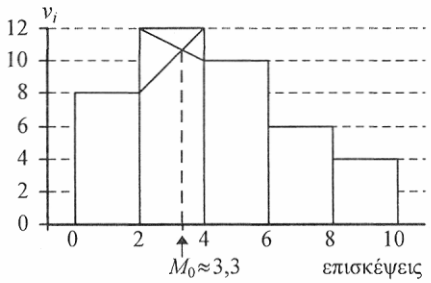
Συγκεκριμένα εδώ έχουμε $\dfrac{13}{40} = 32{,}5\%$ με βαθμό μικρότερο του 15 και $\dfrac{19}{40} = 47{,}5\%$ με βαθμό μεγαλύτερο του 15.

12. Ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

Επισκέψεις [-)	x_i	v_i	$x_i\ v_i$	N_i	F_i%
0 - 2	1	8	8	8	20
2 - 4	3	12	36	20	50
4 - 6	5	10	50	30	75
6 - 8	7	6	42	36	90
8 - 10	9	4	36	40	100
Σύνολο	—	40	172	—	—

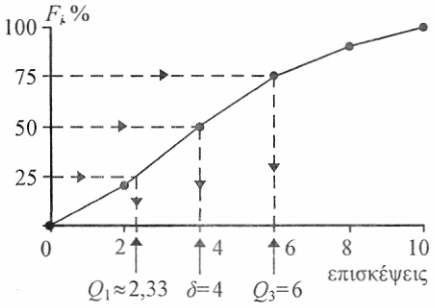
α) $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{\sum v_i} = \dfrac{172}{40} = 4{,}3$.

β)



$M_0 \approx 3{,}3$

γ)



$Q_1 \approx 2{,}33$
$\delta = 4$
$Q_3 = 6$

13. α) $\bar{x} = \dfrac{30 \cdot 170 - 180}{29} \approx 169{,}66\,\text{cm}$

β) $\bar{x} = \dfrac{30 \cdot 170 + 170}{31} = 170\,\text{cm}$

γ) $\bar{x} = \dfrac{30 \cdot 170 - 180 + 170}{30} \approx 169{,}67\,\text{cm}$.

14. α) Διακύμανση ή διασπορά ορίζεται ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των x_i από τη μέση τιμή τους. Μικρότερες (κατ'απόλυτη τιμή) αποκλίσεις έχουμε στη δεύτερη λίστα και μεγαλύτερες αποκλίσεις στην τρίτη λίστα. Άρα μικρότερη διασπορά έχουν οι τιμές της 2ης λίστας και μεγαλύτερη διασπορά της 3ης λίστας.

β) Όχι, γιατί έχουν το ίδιο εύρος.

15. Οι τιμές της βαθμολογίας σε αύξουσα σειρά είναι:

3 4 7 10 11 11 12 13 14 15

$\uparrow\delta$

α) $\bar{x} = \dfrac{3+4+...+15}{10} = \dfrac{100}{10} = 10$

$M_0 = 11, \quad \delta = \dfrac{11+11}{2} = 11.$

β) Το Q_1 είναι η διάμεσος των: 3 4 7 10 11. Άρα $Q_1 = 7$.

Το Q_3 είναι η διάμεσος των: 11 12 13 14 15. Άρα $Q_3 = 13$.

γ) $R = 15 - 3 = 12$

$$s^2 = \frac{(3-10)^2 + (4-10)^2 + ... + (15-10)^2}{10} = \frac{49+36+...+25}{10} = 15$$

$s = \sqrt{15} \approx 3{,}87$

$cv = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{3{,}87}{10} = 38{,}7\%.$

16. Από τον πίνακα της άσκησης 12 βρίσκουμε:

x_i	v_i	$x_i\, v_i$	$x_i^2 v_i$
1	8	8	8
3	12	36	108
5	10	50	250
7	6	42	294
9	4	36	324
—	40	172	—

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum x_1^2 v_i - \frac{\left(\sum x_i v_i\right)^2}{v}\right\}$$

$$= \frac{1}{40}\left\{984 - \frac{172^2}{40}\right\}$$

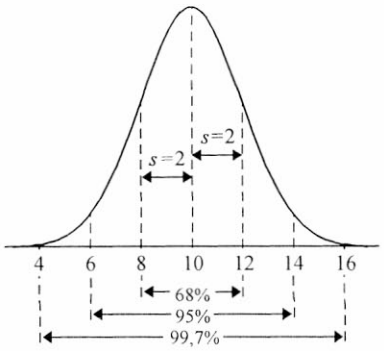
$$= \frac{1}{40}\left\{984 - \frac{29584}{40}\right\} = \frac{244{,}4}{40} = 6{,}11.$$

Άρα $s = \sqrt{6{,}11} \approx 2{,}47$.

17. Έχουμε $\bar{x} = 10$ και $s = 2$. Άρα:

- στο διάστημα (8, 12) έχουμε το 68%
- στο διάστημα (6,14) έχουμε το 95%
- στο διάστημα (4,16) έχουμε το 99,7%.

Συνεπώς το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται:



α) κάτω από 8 λεπτά είναι το

$$\frac{100\% - 68\%}{2} = 16\%$$

β) πάνω από 14 λεπτά είναι το

$$\frac{100\% - 95\%}{2} = 2{,}5\%$$

γ) το πολύ 10 λεπτά είναι το 50%

δ) μεταξύ 6 και 12 λεπτά είναι το $\dfrac{95\% - 68\%}{2} + 68\% = 81{,}5\%$.

18. α) $\bar{x} = \dfrac{1+2+6}{3} = 3, \qquad \delta = 2$.

β) Οι τιμές αυτές προκύπτουν από τις τιμές του πρώτου δείγματος αν πολλαπλασιάσουμε καθεμιά επί 2.
Άρα $\bar{x} = 3 \cdot 2 = 6$ και $\delta = 2 \cdot 2 = 4$.

γ) Οι τιμές αυτές προκύπτουν από τις τιμές του πρώτου δείγματος αν προσθέσουμε σε καθεμιά το 10.
Άρα $\bar{x} = 3 + 10 = 13$, $\delta = 2 + 10 = 12$.

δ) Οι τιμές αυτές προκύπτουν από τις τιμές του πρώτου δείγματος πολλαπλασιάζοντας καθεμιά επί 2 και προσθέτοντας το 10. Άρα $\bar{x} = 3 \cdot 2 + 10 = 16$, $\delta = 2 \cdot 2 + 10 = 14$.

19. $$s_\alpha^2 = \frac{1}{\nu}\sum (x_i - \bar{x}_\alpha)^2 = \frac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$s_\beta^2 = \frac{1}{\nu}\sum (x_i - \bar{x}_\beta)^2 = \frac{(3-12)^2 + (9-12)^2 + \ldots + (21-12)^2}{5} = \frac{180}{5} = 36$$

$$s_\gamma^2 = \frac{1}{\nu}\sum (x_i - \bar{x}_\beta)^2 = \frac{(6-9)^2 + (8-9)^2 + \ldots + (12-9)^2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$s_\delta^2 = \frac{1}{\nu}\sum (x_i - \bar{x}_\delta)^2 = \frac{(-1+4)^2 + (-3+4)^2 + \ldots + (-7+4)^2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

Άρα $s_\alpha = 2$, $s_\beta = 6$, $s_\gamma = 2$, $s_\delta = 2$.

Παρατηρούμε ότι:

- Οι τιμές της λίστας (β) προκύπτουν από τις αντίστοιχες τιμές της λίστας (α) πολλαπλασιάζοντας κάθε τιμή επί 3. Τότε, από την εφαρμογή 3, η διακύμανση των τιμών της λίστας (β) προκύπει από τη διακύμανση των τιμών της λίστας (α) πολλαπλασιάζοντας επί 3^2. Δηλαδή,
  $s_\beta^2 = 3^2 \cdot s_\alpha^2$ και $s_\beta = 3 \cdot s_\alpha$.

- Οι τιμές της λίστας (γ) προκύπτουν από τις αντίστοιχες τιμές της λίστας (α) προσθέτοντας το 5. Τότε, από την εφαρμογή 3, η διακύμανση της λίστας (γ) ισούται με τη διακύμανση της λίστας (α). Δηλαδή
  $$s_\gamma^2 = s_\alpha^2 \quad \text{και} \quad s_\gamma = s_\alpha.$$

- Οι τιμές της λίστας (δ) προκύπτουν από τις αντίστοιχες τιμές της λίστας (α) πολλαπλασιάζοντας επί (-1). Τότε σύμφωνα με την εφαρμογή 3,
  $$s_\delta^2 = (-1)^2 s_\alpha^2 = s_\alpha^2 \quad \text{και} \quad s_\delta = |-1|\, s_\alpha = s_\alpha.$$

20. $cv = \dfrac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow 0{,}272 = \dfrac{1}{625} \Leftrightarrow s = 170$ ευρώ

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum x_i^2 - v\bar{x}^2\right\} \Leftrightarrow v = \frac{\sum x_i^2}{s^2 + \bar{x}^2} \Leftrightarrow v = \frac{11746700}{170^2 + 625^2} \Leftrightarrow v = 28\,.$$

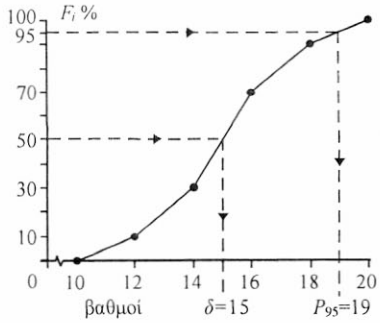
Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Επειδή το εύρος των παρατηρήσεων είναι $R = 20 - 10 = 10$ και το πλήθος των κλάσεων είναι $\kappa = 5$, προκύπτει ότι το πλάτος των κλάσεων είναι $c = R/k = 10/5 = 2$. Επομένως ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

Κλάσεις [-)	x_i	v_i	$x_i\, v_i$	N_i	F_i%
10 - 12	11	5	55	5	10
12 - 14	13	10	130	15	30
14 - 16	15	20	300	35	70
16 - 18	17	10	170	45	90
18 - 20	19	5	95	50	100
Σύνολο	—	50	750	—	—

) $\bar{x} = \dfrac{750}{50} = 15.$

Από το διπλανό πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων βρίσκουμε $\delta = 15$.



γ) Ζητάμε το P_{95}. Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων βρίσκουμε $P_{95} \approx 19$.

2. Επειδή $v = 5$ *και* $s^2 = 10$, έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = vs^2 = 5 \cdot 10 = 50\,.$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_5 - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 = 50 - 14 = 36 \Leftrightarrow$$

$$x_5 - \bar{x} = 6 \Leftrightarrow x_5 = \bar{x} + 6 = 4 + 6 = 10$$

ή $\quad x_5 - \bar{x} = -6 \Leftrightarrow x_5 = \bar{x} - 6 = 4 - 6 = -2$.

Συνεπώς $\quad x_5 = -2$ ή $x_5 = 10$.

3. Σε αύξουσα σειρά οι τιμές είναι:

6 6 9 9 9 12 15 18 21 27

α) $\bar{x} = \dfrac{6+6+9+9+9+12+15+18+21+27}{10} = \dfrac{132}{10} = 13{,}2$ **ευρώ**

$\delta = \dfrac{9+12}{2} = 10{,}5$ **ευρώ** $\qquad M_0 = 9$ **ευρώ**

β) Αν προσθέσουμε το ΦΠΑ 18%, τότε σύμφωνα με την εφαρμογή 3 η μέση τιμή θα αυξηθεί κατά 18%. Δηλαδή η μέση αξία των βιβλίων θα γίνει

$$\bar{x} + \frac{18}{100}\bar{x} = 13{,}2 + 0{,}18 \cdot 13{,}2 \approx 13{,}2 + 2{,}37 \approx 15{,}57 \text{ ευρώ}$$

Εφόσον οι παρατηρήσεις αυξάνονται όλες κατά 18%, τότε η διάμεση τιμή θα είναι η αρχική διάμεση τιμή αυξημένη κατά 18%, δηλαδή θα γίνει

$$\delta + \frac{18}{100}\delta = 10{,}5 + 0{,}18 \cdot 10{,}5 = 12{,}39 \text{ ευρώ}$$

Όμοίως και η επικρατούσα τιμή θα αυξηθεί κατά 18%, δηλαδή θα γίνει

$$M_0 + \frac{18}{100}M_0 = 9 + 0{,}18 \times 9 = 9 + 1{,}62 = 10{,}62 \text{ ευρώ}$$

γ) Εάν προσθέσουμε επιπλέον και το κόστος των 0,3 ευρώ για το ντύσιμο κάθε βιβλίου, τότε η μέση, η διάμεση και η επικρατούσα αξία θα αυξηθούν κατά 0,3 ευρώ δηλαδή θα γίνουν:

15,87 ευρώ, 12,69 ευρώ, 10,92 ευρώ αντιστοίχως.

4. Αν 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 οι τιμές ενός δείγματος, τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι:

$$\bar{x} = \frac{0+2+4+6+8+10+12}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

$$s_x^2 = \frac{(0-6)^2 + (2-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2 + (12-6)^2}{7}$$

$$= \frac{36+16+4+0+4+16+36}{7} = 16.$$

Άρα $s_x = 4$.

Αν από κάθε τιμή αφαιρέσουμε τη μέση τιμή και διαιρέσουμε με την τυπική απόκλιση, οι νέες τιμές θα είναι

$$-\frac{6}{4}, -\frac{4}{4}, -\frac{2}{4}, 0, \frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{4} \quad \text{ή} \quad -1{,}5, -1, -0{,}5, 0, 0{,}5, 1, 1{,}5.$$

Συνεπώς η μέση τιμή και η τυπική τους απόκλιση είναι:

$$\bar{y} = \frac{-1{,}5 - 1 - 0{,}5 + 0 + 0{,}5 + 1 + 1{,}5}{7} = \frac{0}{7} = 0$$

και

$$s_y^2 = \frac{1}{7}\sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{7}\sum y_i^2 = \frac{2{,}25 + 1 + 0{,}25 + 0{,}25 + 1 + 2{,}25}{7} = \frac{7}{7} = 1 .$$

Γενικά, αποδεικνύεται (βλέπε εφαρμογή 3) ότι: αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s, τότε οι τιμές $y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$, $i = 1,2,\ldots,\nu$ έχουν μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1.

5. α) Ο αριθμός των πωλητών είναι $12 + 8 + 14 + 10 + 8 + 5 + 3 = 60$.

β) $7 + 10 + 8 + 5 + 3 = 33$.

γ) $M_{\alpha} \approx 5{,}2$ χιλ. ευρώ=5.200 ευρώ

δ)

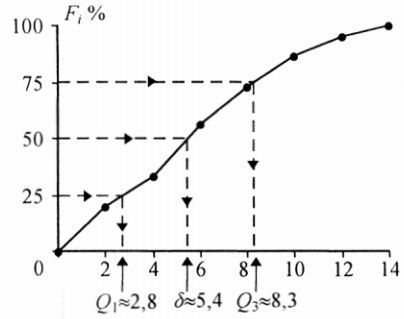
Κλάσεις [-)	x_i	ν_i	$x_i\,\nu_i$	$x_i^2\nu_i$	N_i	F_i%
0 - 2	1	12	12	12	12	20,0
2 - 4	3	8	24	72	20	33,3
4 - 6	5	14	70	350	34	56,7
6 - 8	7	10	70	490	44	73,3
8 - 10	9	8	72	648	52	86,7
10 - 12	11	5	55	605	57	95,0
12 - 14	13	3	39	507	60	100,0
Σύνολο	—	60	342	2684	—	—

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i y_i}{\nu} = \frac{342}{60} = 5{,}7 \text{ χιλιάδες ευρώ=5.700 ευρώ}$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right\} = \frac{1}{60}\left\{2684 - \frac{342^2}{60}\right\} = 12{,}24 .$$

Άρα $\quad s = \sqrt{12{,}24} \approx 3{,}5$ χιλιάδες ευρώ $= 3{,}5 \cdot 10^3$ ευρώ

ε)



Πωλήσεις (σε χιλιάδες ευρώ)

$Q_1 \approx 2,8 \cdot 10^3$ ευρώ

$\delta = Q_2 \approx 5,4 \cdot 10^3$ ευρώ

$Q_3 \approx 8,3 \cdot 10^3$ ευρώ

6. α) Έχουμε $k = 5$ κλάσεις πλάτους $c = 20$ της ηλικίας Χ των ατόμων μιας πόλης. Ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

Κλάσεις [-)	x_i	v_i	$x_i\ v_i$	$x_i^2 v_i$	N_i	F_i %
0 - 20	10	12	120	1200	12	20,0
20 - 40	30	14	420	12600	26	43,3
40 - 60	50	20	1000	50000	46	76,7
60 - 80	70	10	700	49000	56	93,3
80 - 100	90	4	360	32400	60	100,0
Σύνολο	—	60	2600	145200	—	—

από τον οποίο βρίσκουμε

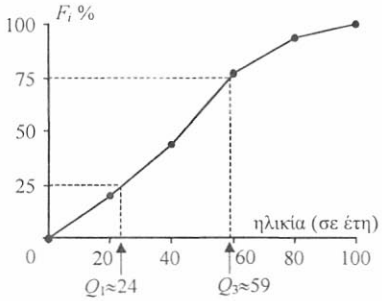
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{2600}{60} = 43,33 \text{ έτη}$$

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{1}{60}\left\{145200 - \frac{2600^2}{60}\right\} = 542,22$$

Άρα $s = \sqrt{542,22} = 23,29$ έτη.

$cv = \dfrac{23,29}{43,33} = 53,75\%$. Η τιμή αυτή σημαίνει ότι έχουμε μεγάλη "ανομοιογένεια".

β) Κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων από το οποίο εκτιμούμε τα Q_1 *και* Q_3.



$Q_1 \approx 24$ έτη

$Q_3 \approx 59$ έτη

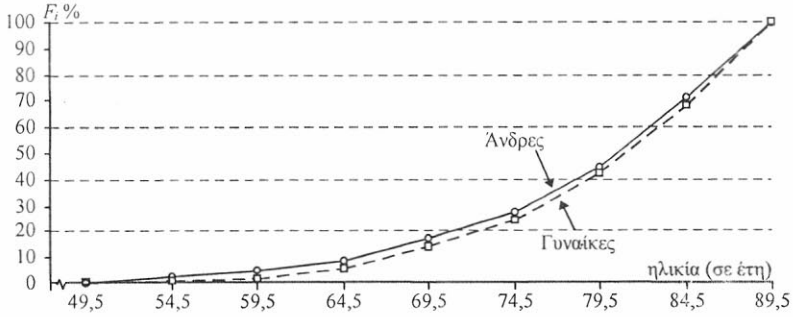
$Q = Q_3 - Q_1 = 59 - 24 = 35$

Δηλαδή το 25% των ατόμων έχουν ηλικία κάτω των 24 ετών, το 25% έχουν ηλικία άνω των 59 ετών και για το ενδιάμεσο 50% των ατόμων η ηλικία τους διαφέρει μέχρι και 35 χρόνια.

7. Παρατηρούμε ότι οι κλάσεις της ηλικίας είναι 50-54, 55-59, κτλ. Τότε όμως δύο άτομα, για παράδειγμα 54,2 και 54,8 ετών αντιστοίχως, σε ποια κλάση θα ταξινομηθούν; Στις περιπτώσεις αυτές συνήθως η στρογγυλοποίηση γίνεται στον πλησιέστερο ακέραιο οπότε το 54,2 θα γίνει 54 και το 54,8 θα γίνει 55. Συνεπώς χρησιμοποιώντας για την ηλικία κλάσεις της μορφής [-), οι κλάσεις και ο πίνακας συχνοτήτων για τους άνδρες και τις γυναίκες είναι:

Κλάσεις [-)	x_i	Άνδρες			Γυναίκες		
		ν_i	N_i	F_i%	ν'_i	N'_i	F'_i%
49,5-54,5	52	10	10	2,3	7	7	1,1
54,5-59,5	57	10	20	4,6	4	11	1,8
59,5-64,5	62	17	37	8,6	21	32	5,2
64,5-69,5	67	36	73	17,0	57	89	14,4
69,5-74,5	72	44	117	27,2	61	150	24,3
74,5-79,5	77	73	190	44,2	109	259	42,0
79,5-84,5	82	117	307	71,4	162	421	68,3
84,5-89,5	87	123	430	100,0	195	616	100,0
Σύνολο	—	430		—	616	—	—

Από τον πίνακα, τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων είναι:



Παρατηρούμε από τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων ότι τα ποσοστά των ανδρών που πέθαναν από υπερτασική νόσο το 1995 ήταν σ'όλες τις ηλικίες μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα ποσοστά των γυναικών. Το 25% των ανδρών που πέθαναν από υπερτασική νόσο ήταν κάτω των 73 ετών περίπου ενώ για το αντίστοιχο ποσοστό η ηλικία των γυναικών ήταν κάτω των 75 ετών περίπου.

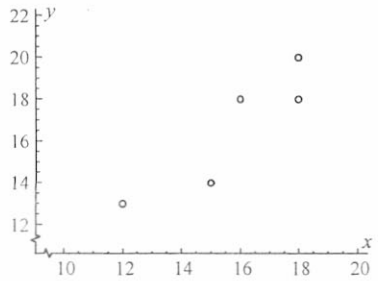
Ομοίως το 50% των ανδρών και το 50% των γυναικών ήταν άνω των 81 ετών. Τέλος, το 25% των ανδρών και το 25% των γυναικών ήταν (περίπου) άνω των 85 ετών.

2.4 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

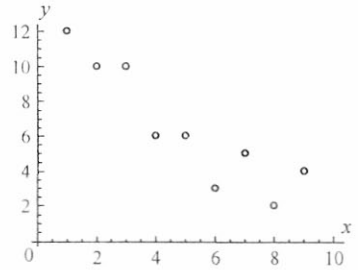
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Τα διαγράμματα διασποράς για τα ζεύγη (x_i, y_i) στις περιπτώσεις (α) και (β) δίνονται παρακάτω. Η προσαρμοσμένη "με το μάτι" ευθεία μπορεί να είναι, όπως έχουμε δει, διαφορετική για κάθε μαθητή.

α)



β)



2. i) Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 1. Επιλέγουμε τα σημεία $A(6, 8)$, $B(18, 18)$, οπότε για την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} 8=\alpha+6\beta \\ 18=\alpha+18\beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 8=\alpha+6\beta \\ 10=12\beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 8=\alpha+6\beta \\ \beta=\dfrac{5}{6} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha=3 \\ \beta=\dfrac{5}{6} \end{array}\right\}.$$

Άρα $\qquad y=3+\dfrac{5}{6}x$.

ii) Εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση (i). Για τα σημεία $A(20, 60)$, $B(35, 70)$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}60=\alpha+20\beta\\70=\alpha+35\beta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}60=\alpha+20\beta\\10=15\beta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}60=\alpha+20\beta\\\beta=\dfrac{2}{3}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha\approx 46{,}7\\\beta\approx 0{,}67\end{array}\right\}.$$

Άρα $\quad y=46{,}7+0{,}67x$.

3. α) Έχουμε τον πίνακα

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	1	1	1
2	2	4	4
3	3	9	9
4	4	16	16
5	5	25	25
15	15	55	55

$y=\alpha+\beta x$

$v=5$

$\bar{x}=\dfrac{\sum x_i}{v}=\dfrac{15}{5}=3$

$\bar{y}=\dfrac{\sum y_i}{v}=\dfrac{15}{5}=3$

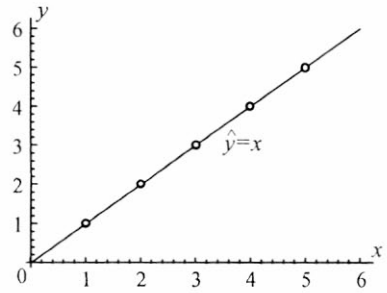
από τον οποίο βρίσκουμε

$$\hat{\beta}=\frac{v\sum x_iy_i-\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{v\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}=\frac{5\cdot 55-15\cdot 15}{5\cdot 55-15^2}=1$$

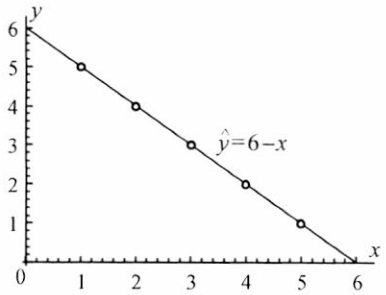
$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\,\bar{x}=3-1\cdot 3=0\,.$$

Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y}=x$ και δίνεται στο παρακάτω σχήμα (α).

Συνεπώς η πρόβλεψη του y για $x=6$ *είναι* $\hat{y}=6$.



(α)



(β)

Αν εργαστούμε όπως και στην περίπτωση (α), βρίσκουμε:

β) $v=5,\ \ \bar{x}=3,\ \ \bar{y}=3,\ \ \hat{\beta}=-1,\ \ \hat{\alpha}=6$.

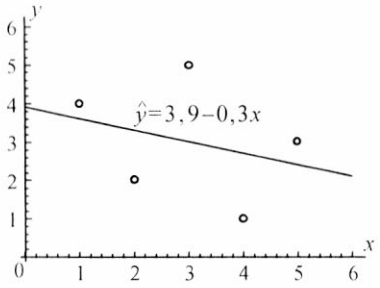
Άρα $\hat{y}=6-x$. Συνεπώς για $x=6$ έχουμε $\hat{y}=0$.

γ) $v=5,\ \ \bar{x}=3,\ \ \bar{y}=3,\ \ \hat{\beta}=-0{,}3,\ \ \hat{\alpha}=3{,}9$.

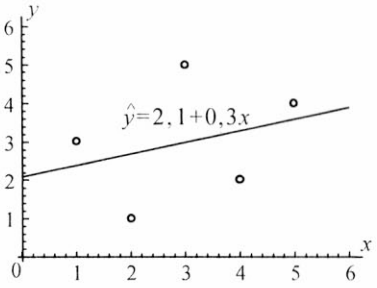
Άρα $\hat{y}=3{,}9-0{,}3x$. Συνεπώς για $x=6$ έχουμε $\hat{y}=2{,}1$.

δ) $v=5,\ \ \bar{x}=3,\ \ \bar{y}=3,\ \ \hat{\beta}=0{,}3,\ \ \hat{\alpha}=2{,}1$.

Άρα $\hat{y}=2{,}1+0{,}3x$. Συνεπώς για $x=6$ έχουμε $\hat{y}=3{,}9$.



(γ)



(δ)

4. Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0,30	12,5	0,0990	3,750
0,35	11,5	0,1225	4,025
0,40	11,0	0,1600	4,400
0,45	8,5	0,2025	3,825
0,55	7,0	0,3025	3,850
0,60	6,0	0,3600	3,600
0,65	5,0	0,4225	3,250
0,70	4,0	0,4900	2,800
0,75	2,5	0,5625	1,875
0,80	2,0	0,6400	1,600
5,55	70,0	3,3525	32,975

$$v = 10$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{v} = \frac{5,55}{10} = 0,555$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{v} = \frac{70}{10} = 7$$

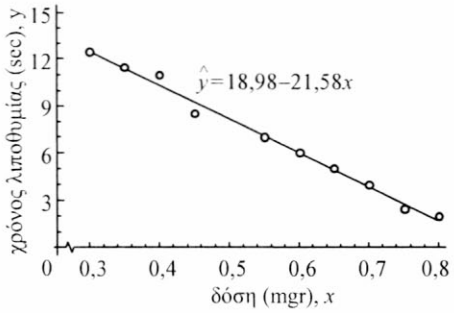
από τον οποίο βρίσκουμε

$$\hat{\beta} = \frac{v\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{v\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{10 \cdot 32,975 - 5,55 \cdot 70}{10 \cdot 3,3525 - 5,55^2} = -21,58$$

και

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} = 7 - (-21,58) \cdot 0,555 = 18,98\,.$$

Το διάγραμμα διασποράς και η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = 18,98 - 21,58\,x$, δίνονται παρακάτω:



Η ευθεία που προσαρμόστηκε με με "το μάτι" στην εφαρμογή 1 ήταν η $y = 18{,}5 - 20{,}58x$. Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι έγινε ικανοποιητική προσαρμογή σε σχέση με την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y} = 18{,}98 - 21{,}58x$.

5. α) Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
12	13	144	156
15	14	225	210
16	18	256	288
18	18	324	324
18	20	324	360
79	83	1273	1338

$y = \alpha + \beta x$

$v = 5$

$\bar{x} = \frac{79}{5} = 15{,}8$

$\bar{y} = \frac{83}{5} = 16{,}6$

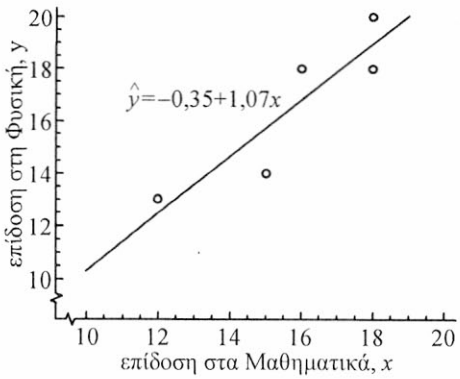
από τον οποίο βρίσκουμε

$$\hat{\beta} = \frac{v\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{v\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{5 \cdot 1338 - 79 \cdot 83}{5 \cdot 1273 - 79^2} = \frac{133}{124} = 1{,}07$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} = 16{,}6 - 1{,}07 \cdot 15{,}8 = -0{,}35.$$

Άρα $\hat{y} = -0{,}35 + 1{,}07x$.

Το διάγραμμα διασποράς και η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων δίνονται παρακάτω



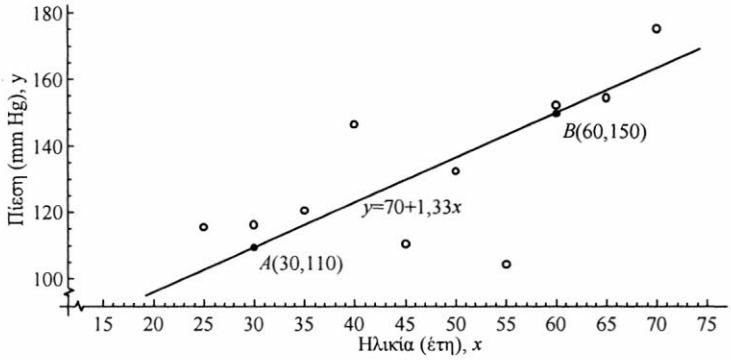
β) Αν $x = 15$ *τότε* $\hat{y} = -0{,}35 + 1{,}07 \cdot 15 = 15{,}7 \approx 16$.

Επομένως για μαθητή με βαθμό 15 στα Μαθηματικά αναμένεται να έχει βαθμό 16 στη Φυσική.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Η ηλικία (X) θεωρείται ως ανεξάρτητη μεταβλητή και η συστολική πίεση (Y) ως εξαρτημένη μεταβλητή καθόσον η ηλικία καθορίζεται χωρίς σφάλμα ενώ στη μέτρηση της συστολικής πίεσης έχουμε κάποιο σφάλμα.

β)



γ) Είναι δυνατό να έχουμε διαφορετικές ευθείες που προσαρμόζονται "με το μάτι" στα δεδομένα αυτά. Αν, για παράδειγμα, πάρουμε τα σημεία Α(30, 110) και Β (60, 150), βρίσκουμε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά είναι η $y = 70 + 1{,}33x$.

δ) Για μια γυναίκα ηλικίας 75 ετών προβλέπεται συστολική πίεση

$$y = 70 + 1{,}33 \cdot 75 \approx 170\,\text{mmHg}.$$

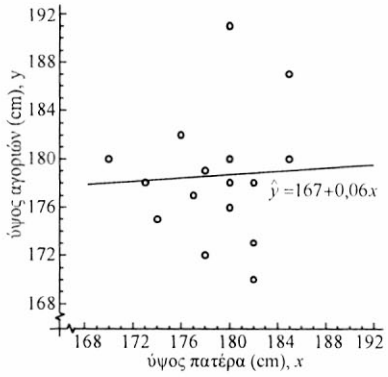
2. α) Αρκεί να βρούμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων του ύψους (Y) των μαθητών πάνω στο ύψος (X) των πατέρων τους ή, για ευκολία, να προσαρμόσουμε "με το μάτι" την καλύτερη ευθεία στο αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς. Οι τιμές των ζευγών (x_i, y_i), $i = 1,2,...,18$ δίνονται παρακάτω, όπου y_A παριστάνει το ύψος των αγοριών και x_Π το ύψος των πατέρων τους:

y_A	x_Π	x_M	$z = \dfrac{x_\Pi + x_M}{2}$
180	185	165	175
175	174	174	174
173	182	160	171
170	182	165	173,5
177	177	169	173
180	170	165	167,5
182	176	173	174,5
178	182	170	176
178	173	168	170,5
172	178	165	171,5
187	185	170	177,5
180	180	167	173,5
178	173	170	171,5
191	180	170	175
176	180	172	176
179	178	160	169
178	180	160	170
180	170	163	166,5

Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων του ύψους των αγοριών πάνω στο ύψος του πατέρα, όπως μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί μετά από πράξεις, είναι η

$$\hat{y}_A = 167 + 0{,}06X_\Pi .$$

Για $x_\Pi = 180$ cm το προβλεπόμενο ύψος του αγοριού είναι $\hat{y}_A = 178{,}7$ cm .

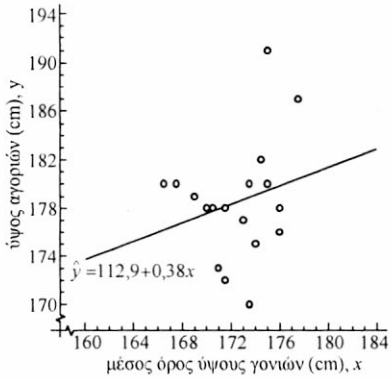


β) Όπως προηγουμένως, με τη διαφορά ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η

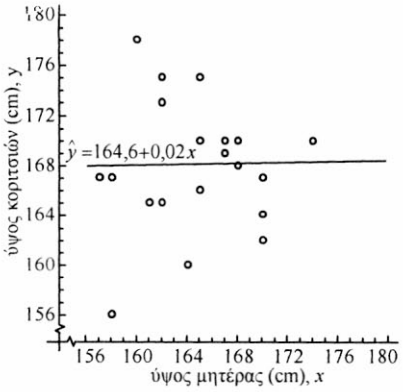
$$Z = \frac{\text{Ύψος πατέρα} + \text{Ύψος μητέρας}}{2} = \frac{X_\Pi + X_M}{2} .$$

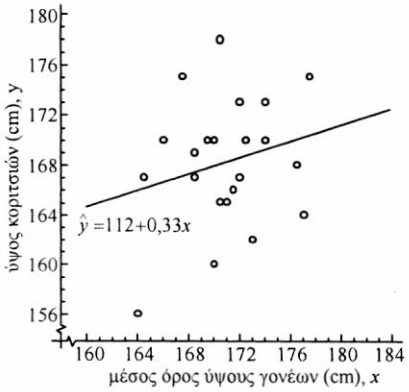
Οι τιμές των ζευγών $(y_i\ ,\ z_i)$, $i = 1,2,...,18$ δίνονται επίσης στον παραπάνω πίνακα. Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων του ύψους των αγοριών στο μέσο ύψος των γονιών τους είναι η $\hat{y}_A = 112{,}9 + 0{,}38z$.

Για $z = 170$ cm το προβλεπόμενο ύψος του αγοριού είναι $\hat{y}_A = 177{,}5$ cm .



3. Εργαζόμαστε όπως στην άσκηση 2 όπου Y_K το ύψος των κοριτσιών, X_M το ύψος της μητέρας και Z το μέσο ύψος των γονιών. Για κάθε περίπτωση έχουμε 22 ζεύγη τιμών.





α) Μετά από πράξεις, η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων του ύψους των κοριτσιών πάνω στο ύψος της μητέρας είναι $\hat{y}_K = 164{,}6 + 0{,}02x_M$. Έτσι το προβλεπόμενο ύψος ενός κοριτσιού με ύψος μητέρας $x_M = 168$ cm είναι $\hat{y}_K = 168{,}3\,\text{cm}$.

β) Αν εργαστούμε όπως και στην περίπτωση (α) βρίσκουμε $\hat{y}_K = 112 + 0{,}33z$. Για $z = 170$ cm έχουμε $\hat{y}_K = 168{,}1\,\text{cm}$.

4. α) Συμπληρώνουμε πρώτα τον παρακάτω πίνακα

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
20	20	400	400
20	22	400	440
22	24	484	528
27	25	729	675
24	28	576	672
25	30	625	750
28	33	784	924
34	38	1156	1292
200	220	5154	5681

$\nu = 8$
$\bar{x} = 25$
$\bar{y} = 27{,}5$

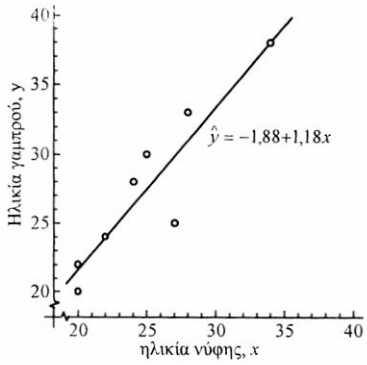
από τον οποίο βρίσκουμε

$$\hat{\beta} = \frac{\nu\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\nu\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$= \frac{8\cdot 5681 - 200\cdot 220}{8\cdot 5154 - 200^2}$$

$$= \frac{1448}{1232} = 1{,}175 \approx 1{,}18$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} = 27{,}5 - 1{,}175\cdot 25 \approx -1{,}88\,.$$



Επομένως η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = -1{,}88 + 1{,}18x$

β) Για μια νύφη $x = 25$ ετών εκτιμούμε από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων την ηλικία του γαμπρού.

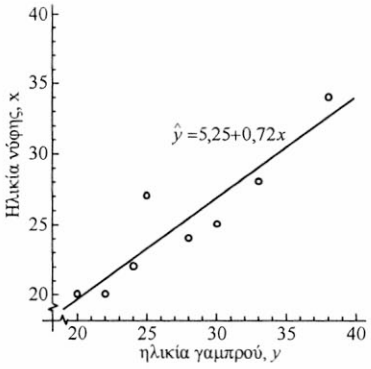
$$y = -1{,}88 + 1{,}18 \cdot 25 = 27{,}62 \text{ έτη } \cong 27 \text{ έτη } 7 \text{ μήνες}$$

γ) Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή X (ηλικία νύφης) μεταβάλλεται κατά μία μονάδα τότε η εξαρτημένη μεταβλητή Y μεταβάλλεται κατά $\hat{\beta}$ μονάδες. Επομένως όταν η ηλικία της νύφης αυξηθεί κατά ένα έτος αναμένεται η αύξηση (διότι $\hat{\beta} > 0$) της ηλικίας του γαμπρού κατά $\hat{\beta} = 1{,}18$ έτη ≈ 1 έτος 2 μήνες.

5. α) Αν εργαστούμε όπως στην άσκηση 4 βρίσκουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων της ηλικίας της νύφης στην ηλικία του γαμπρού $\hat{x} = \hat{\gamma} + \hat{\delta}y$, όπου

$$\hat{\delta} = \frac{v\sum y_i x_i - \left(\sum y_i\right)\left(\sum x_i\right)}{v\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}$$

$$= \frac{8 \cdot 5681 - 220 \cdot 200}{8 \cdot 6302 - 220^2} = 0{,}72$$



και $\hat{\gamma} = \overline{x} - \hat{\delta}\,\overline{y} = 25 - 0{,}72 \cdot 27{,}5 \approx 5{,}25$.

Επομένως η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων της ηλικίας της νύφης στην ηλικία του γαμπρού είναι η $\hat{x} = 5{,}25 + 0{,}72y$.

β) Για ένα γαμπρό ηλικίας $y = 28$ ετών η εκτιμώμενη ηλικία της νύφης είναι:

$$\hat{x} = 5{,}25 + 0{,}72 \cdot 28 = 25{,}4 \text{ έτη } \cong 25 \text{ έτη } 5 \text{ μήνες.}$$

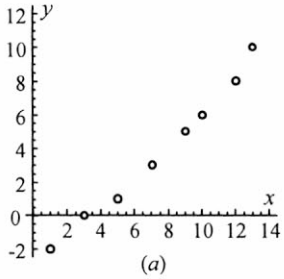
γ) Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή Y (ηλικία γαμπρού) μεταβάλλεται κατά μία μονάδα τότε η εξαρτημένη μεταβλητή X μεταβάλλεται κατά $\hat{\delta}$ μονάδες. Επομένως όταν η ηλικία του γαμπρού αυξηθεί κατά ένα έτος αναμένεται αύξηση (διότι $\hat{\delta} > 0$) της ηλικίας της νύφης κατά $\hat{\delta} = 0{,}72$ έτη ≈ 9 μήνες.

2.5 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

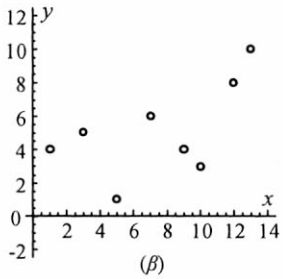
1. 0, 0,2, -0,6, -0,7, 0,9, -1

2.



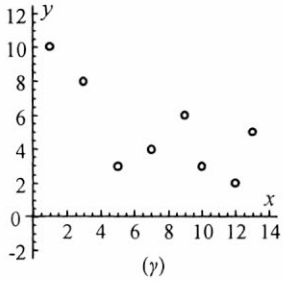
(α)

θετική-μεγάλη



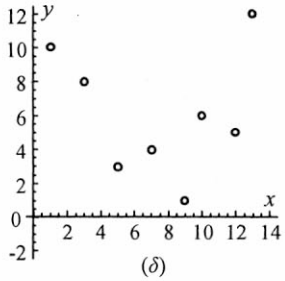
(β)

θετική-μέτρια



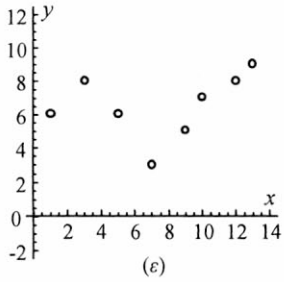
(γ)

αρνητική-μέτρια



(δ)

γραμμικά ασυσχέτιστες



(ε)

θετική-μικρή

3. α) Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή της §2.5:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	-2	1	4	-2
3	0	9	0	0
5	1	25	1	5
7	3	49	9	21
9	5	81	25	45
10	6	100	36	60
12	8	144	64	96
13	10	169	100	130
60	31	578	239	355

$\nu = 8$

Επομένως ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι

$$r = \frac{\nu\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\nu\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\sqrt{\nu\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}} = \frac{8\cdot 355 - 60\cdot 31}{\sqrt{8\cdot 578 - 60^2}\sqrt{8\cdot 239 - 31^2}}$$

$$= \frac{2840 - 1860}{\sqrt{1024}\sqrt{951}} \approx \frac{980}{986{,}83} \approx 0{,}99\,,$$

δηλαδή **αρκετά μεγάλη θετική** γραμμική συσχέτιση, όπως ακριβώς εκτιμήθηκε και από το διάγραμμα διασποράς (α) της προηγούμενης άσκησης.

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τους συντελεστές γραμμικής συσχέτισης για τις περιπτώσεις (β) έως (ε), για τις οποίες βρίσκουμε:

β) $r = 0{,}59$ γ) $r = -0{,}70$ δ) $r = -0{,}05$ ε) $r = 0{,}33$

4. Υπολογίζουμε πρώτα τις μέσες τιμές $\bar{x}$ και $\bar{y}$ και στη συνέχεια βρίσκουμε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης από τη σχέση (1) της §2.5:

α) $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ και $\bar{y} = \dfrac{4+2+0-2-4}{5} = 0$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	4	-2	4	4	16	-8
2	2	-1	2	1	4	-2
3	0	0	0	0	0	0
4	-2	1	-2	1	4	-2
5	-4	2	-4	4	16	-8
—	—	0	0	10	40	-20

Επομένως

$$r_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-20}{\sqrt{10}\sqrt{40}} = -1\,.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχει τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση.

β) Αν εργαστούμε όπως στην περίπτωση (α) βρίσκουμε $r_2 = 1$, δηλαδή υπάρχει τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.
Συγκρίνοντας τις τιμές των (x, y) και τους αντίστοιχους συντελεστές γραμμικής συσχέτισης παρατηρούμε ότι:
Εάν οι X, Y είναι αρνητικά συσχετισμένες οι $X, -Y$ είναι θετικά συσχετισμένες.

5. Επειδή $\nu = 4$ και $\bar{x} = 7$, $\bar{y} = 4{,}5$ έχουμε $\sum x_i = \nu\bar{x} = 28$ και $\sum y_i = \nu\bar{y} = 18$.
Συνεπώς ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι:

$$r = \frac{\nu\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\sqrt{\nu\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}\sqrt{\nu\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}} = \frac{4\cdot 138 - 28\cdot 18}{\sqrt{4\cdot 210 - 28^2}\sqrt{4\cdot 92 - 18^2}}$$

$$= \frac{48}{\sqrt{56}\sqrt{44}} \approx 0{,}97 .$$

6. Επειδή $(x_2, y_2) = (2, 6)$ έχουμε:

- $(x_2 - \bar{x})^2 = 9 \Leftrightarrow (2 - \bar{x})^2 = 9 \Leftrightarrow \bar{x} = -1$ ή $\bar{x} = 5$.
  Επειδή όμως $x_i > 0$ η $\bar{x} = -1$ απορρίπτεται.
  Όταν όμως $\bar{x} = 5$ έχουμε $\frac{\sum x_i}{6} = 5 \Leftrightarrow \sum x_i = 30$.
  Συνεπώς η τρίτη τιμή της μεταβλητής X είναι η $30 - (1 + 2 + 6 + 8 + 9) = 4$.

- $(y_2 - \bar{y})^2 = 1 \Leftrightarrow (6 - \bar{y})^2 = 1 \Leftrightarrow \bar{y} = 5$ ή $\bar{y} = 7$
  Για $\bar{y} = 5$ έχουμε:
  $(x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) = (2 - 5)(6 - 5) = -3 \neq 3$ απορρίπτεται.
  Για $\bar{y} = 7$ έχουμε
  $(x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) = (2 - 5)(6 - 7) = 3$, δεκτή.
  Όταν όμως $\bar{y} = 7$ έχουμε $\frac{\sum y_i}{6} = 7 \Leftrightarrow \sum y_i = 42$.
  Συνεπώς η τέταρτη τιμή της μεταβλητής Y είναι η $42 - (3 + 6 + 1 + 8 + 13) = 11$.

- Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τον πίνακα ως εξής:

x_i	y_i	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
1	3	16	16	16
2	6	9	1	3
4	1	1	36	6
6	11	1	16	4
8	8	9	1	3
9	13	16	36	24
30	42	54	106	56

$v = 6$

$\bar{x} = 5$

$\bar{y} = 7$

από τον οποίο βρίσκουμε

$$r = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{56}{\sqrt{54}\sqrt{106}} = \frac{56}{75{,}66} = 0{,}74\,.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Αν εργαστούμε όπως στην εφαρμογή της §2.5 βρίσκουμε τον πίνακα

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
15,6	10,8	243,36	116,64	168,48
15,2	11,1	231,04	123,21	168,72
14,7	11,5	216,09	132,25	169,05
14,3	12,1	204,49	146,41	173,03
13,4	12,8	179,56	163,84	171,52
12,8	13,2	163,84	174,24	168,96
86,0	71,5	1238,38	856,59	1019,76

$v = 6$

Επομένως

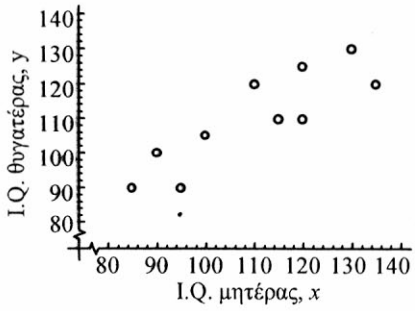
$$r = \frac{v\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\sqrt{v\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}\sqrt{v\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}}$$

$$= \frac{6\cdot 1019{,}76 - 86{,}0\cdot 71{,}5}{\sqrt{6\cdot 1238{,}38 - 86^2}\sqrt{6\cdot 856{,}59 - (71{,}5)^2}} = \frac{-30{,}44}{\sqrt{34{,}28}\sqrt{27{,}29}} \approx -1\,.$$

Έχουμε δηλαδή τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση μεταξύ της κατανάλωσης άπαχου και πλήρους γάλακτος.

β) Αν πολλαπλασιάσουμε τις παραπάνω τιμές των x_i και y_i με 3,8 βρίσκουμε την κατανάλωση σε λίτρα. Αν εργαστούμε όπως στην περίπτωση α) βρίσκουμε πάλι ότι $r \approx -1$.

2. α) Το διάγραμμα διασποράς είναι::



β) Από το διάγραμμα διασποράς εκτιμούμε ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης είναι περίπου 0,90.

γ) Έχουμε τον πίνακα

x_i	y_i	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
85	90	625	400	500
90	100	400	100	200
95	90	225	400	300
100	105	100	25	50
110	120	0	100	0
115	110	25	0	0
120	125	100	225	150
120	110	100	0	0
130	130	400	400	400
135	120	625	100	250
1100	1100	2600	1750	1850

από τον οποίο βρίσκουμε

$$\bar{x}=110,\ \bar{y}=110 \quad \text{και} \quad r\approx 0{,}87\,,$$

δηλαδή έχουμε αρκετά μεγάλη θετική γραμμική συσχέτιση

3. α)
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{\nu}\{x_iy_i-\bar{y}x_i-\bar{x}y_i+\bar{x}\bar{y}\}\\ &= \sum x_iy_i-\bar{y}\sum x_i-\bar{x}\sum y_i+\sum\bar{x}\bar{y}\\ &= \sum x_iy_i-\nu\bar{y}\bar{x}-\nu\bar{x}\bar{y}+\nu\bar{x}\bar{y}\\ &= \sum x_iy_i-\nu\bar{x}\bar{y}\,.\end{aligned}$$

β) Για $\nu=7$ έχουμε:

$$\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum x_iy_i-\nu\bar{x}\bar{y}=308-7\cdot4\cdot9=56\,.$$

Επομένως

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{56}{\sqrt{28}\sqrt{112}} = \frac{56}{56} = 1,$$

δηλαδή έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.

4. Αν παραστήσουμε με Χ τη βαθμολογία του εξεταστή Α και με Υ τη βαθμολογία του εξεταστή Β έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
55	54	3025	2916	2970
62	56	3844	3136	3472
71	61	5041	3721	4331
66	66	4356	4356	4356
63	63	3969	3969	3969
56	61	3136	3721	3416
72	73	5184	5329	5256
51	54	2601	2916	2754
496	488	31156	30064	30524

από τον οποίο βρίσκουμε

$$r = \frac{v\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\sqrt{v\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}\sqrt{v\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}}$$

$$= \frac{8 \cdot 30524 - 496 \cdot 488}{\sqrt{8 \cdot 31156 - 496^2}\sqrt{8 \cdot 30064 - 488^2}} \approx 0{,}77 .$$

Επομένως έχουμε αρκετά μεγάλη θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ της βαθμολογίας των δύο εξεταστών.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων

x_i	v_i	N_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$	f_i%	F_i%
0	10	10	0	0	12,50	12,50
1	25	35	25	25	31,25	43,75
2	20	55	40	80	25,00	68,75
3	12	67	36	108	15,00	83,75
4	6	73	24	96	7,50	91,25
5	5	78	25	125	6,25	97,50
6	2	80	12	72	2,50	100,00
Σύν.	80	—	162	506	100,00	—

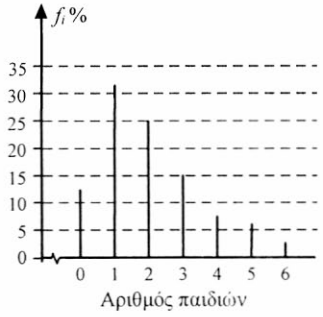
από τον οποίο βρίσκουμε

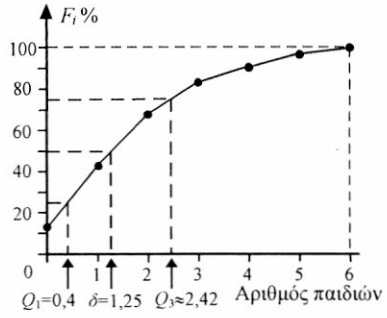
α) $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{\sum v_i} = \dfrac{162}{80} = 2{,}025$, $\delta = \dfrac{2+2}{2} = 2$, $M_0 = 1$

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{1}{80}\left\{506 - \frac{162^2}{80}\right\} = 2{,}224 .$$

Άρα $s = \sqrt{2{,}224} = 1{,}49$.

β)





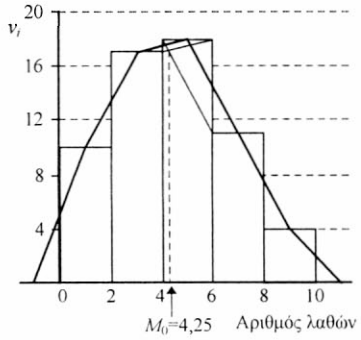
Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων εκτιμούμε $Q_1 \approx 0{,}4$, $\delta \approx 1{,}25$ *και* $Q_3 \approx 2{,}4$.

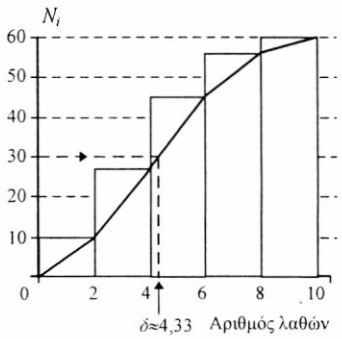
2. $v = 60$, $\kappa = 5$, $c = 2$

α) Ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

Κλάσεις [-)	x_i	v_i	N_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
0 - 2	1	10	10	10	10
2 - 4	3	17	27	51	153
4 - 6	5	18	45	90	450
6 - 8	7	11	56	77	539
8 -10	9	4	60	36	324
Σύνολο	—	60	—	264	1476

β)





γ) • $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{\sum v_i} = \dfrac{264}{60} = 4{,}4$ λάθη

- $\delta \approx 4{,}3$ λάθη
- $M_0 \approx 4{,}25$ λάθη
- $s^2 = \dfrac{1}{v}\left\{\sum x_i^2 v_i - \dfrac{\left(\sum x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \dfrac{1}{60}\left\{1476 - \dfrac{264^2}{60}\right\} = 5{,}24$.
- $s = \sqrt{5{,}24} \approx 2{,}29$.

3. α) Επειδή το 18% των ν=200 υπαλλήλων ανήκουν στην πρώτη κλάση, συμπεραίνουμε ότι η συχνότητα v_1 της πρώτης κλάσης είναι

$v_1 = \dfrac{18}{100} \cdot 200 = 36$. Ομοίως υπολογίζουμε και τις συχνότητες των άλλων κλάσεων, οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [-)	x_i	v_i	$f_i\%$	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$	υ_i^*
0 - 5	2,5	36	18	90	225	3,6
5 - 10	12,5	60	30	750	9375	6,0
10 - 20	15,0	68	34	1020	15300	3,4
20 - 30	25,0	28	14	700	17500	1,4
30 - 35	32,5	8	4	260	8450	0,8
Σύνολο	—	200	100	2820	50850	—

β) $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{\sum v_i} = \dfrac{2820}{200} = 14{,}1$

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{1}{200}\left\{50850 - \frac{2820^2}{200}\right\} = 55{,}44.$$

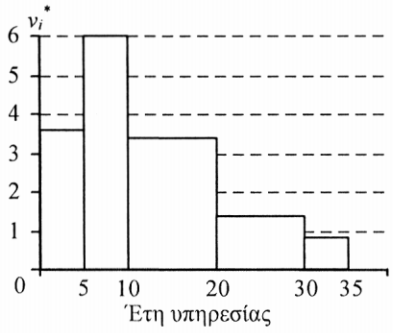
Άρα $s = 7{,}4$.

γ) i) Πρέπει να έχουν τώρα τουλάχιστον 30 έτη υπηρεσίας. Επομένως 8 υπάλληλοι θα συνταξιοδοτηθούν στην επόμενη πενταετία.

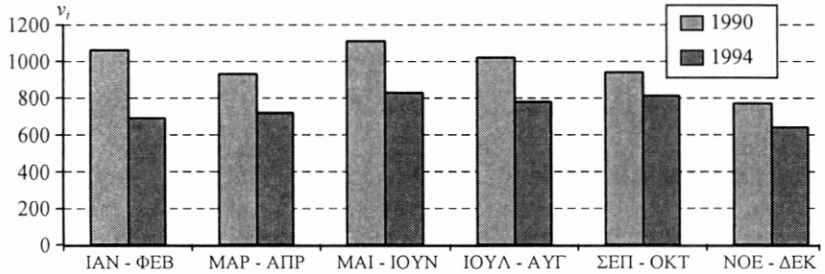
ii) Πρέπει να έχουν τώρα τουλάχιστον 25 έτη υπηρεσίας. Υποθέτοντας ότι τα 28 άτομα στην κλάση 20-30 είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα, οι 14 θα έχουν πάνω από 25 έτη υπηρεσίας (και κάτω των 30 ετών). Συνεπώς, συνολικά $14 + 8 = 22$ άτομα θα συνταξιοδοτηθούν στην επόμενη δεκαετία.

δ) Επειδή έχουμε άνισες κλάσεις, το ύψος των ορθογωνίων θα είναι $\upsilon_i^* = \dfrac{f_i\%}{c_i}$. Έτσι για την πρώτη κλάση με πλάτος $c_1 = 5 - 0 = 5$ και σχετική συχνότητα 18% το ύψος του ορθογωνίου είναι $\upsilon_1^* = \dfrac{18}{5} = 3{,}6$. Ομοίως

βρίσκουμε και τα άλλα ύψη υ_i^* τα οποία δίνονται στον παραπάτω πίνακα. Στη συνέχεια βρίσκουμε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



4. α)



β) $\bar{x}_{1990} = \dfrac{5834}{12} \approx 486$ ατυχήματα ανά μήνα

$\bar{x}_{1994} = \dfrac{4465}{12} \approx 372$ ατυχήματα ανά μήνα.

γ) $5834 \times 1{,}4\% \approx 82$ για το 1990

$4465 \times 2{,}1\% \approx 94$ για το 1994

Παρατηρούμε ότι ενώ έχουμε λιγότερα κατά μέσο όρο ατυχήματα το 1994 τα θανατηφόρα ήταν περισσότερα. Επίσης το 1990 είχαμε μια, έστω και μικρή, καθοδική τάση των ατυχημάτων κατά τη διάρκεια του έτους. Αντίθετα το 1994 ο αριθμός των ατυχημάτων ήταν περίπου σταθερός, γύρω στα 750 ανά δίμηνο.

5. α) $\bar{x}_A = \dfrac{12+14+23+30+36}{5} = 23$ χιλ. ώρες $= 23.000$ ώρες

$\bar{x}_B = \dfrac{12+13+16+22+32}{5} = 19$ χιλ. ώρες $= 19.000$ ώρες.

Κατά μέσο όρο μία ηλεκτρ.. συσκευή τύπου Α στοιχίζει

$\dfrac{230 \text{ ευρώ}}{23000 \text{ ώρες}} = 0{,}01$ ευρώ/ώρα=1 λεπτό/ώρα

Ομοίως κατά μέσο όρο μια ηλεκτρ. Συσκευή τύπου Β στοιχίζει για καθεμιά από τις τρεις περιπτώσεις:

i) $\dfrac{180 \text{ ευρώ}}{19.000 \text{ ώρες}} \approx 0,95$ λεπτά/ώρα. Άρα προτιμούμε ηλ. συσκευή τύπου Β.

ii) $\dfrac{190 \text{ ευρώ}}{19.000 \text{ ώρες}} \approx 1$ λεπτό /ώρα. Άρα δεν έχουμε προτίμηση.

iii) $\dfrac{200 \text{ ευρώ}}{19.000 \text{ ώρες}} \approx 1,05$ λεπτά/ώρα. Άρα προτιμούμε ηλ. συσκευή τύπου Α.

β) Αρκεί να βρούμε τους συντελεστές μεταβλητότητας:

$$s_A^2 = \frac{(12-23)^2+(14-23)^2+(23-23)^2+(30-23)^2+(36-23)^2}{5} = \frac{420}{5} = 84$$

οπότε $s_A = 9,165$

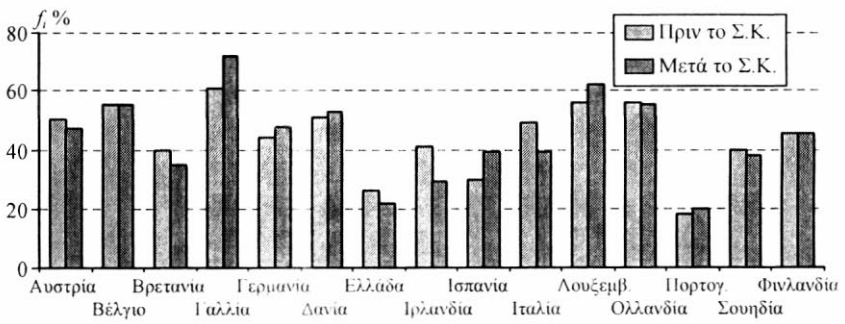
$$s_B^2 = \frac{(12-19)^2+(13-19)^2+(16-19)^2+(22-19)^2+(32-19)^2}{5} = \frac{272}{5} = 54,4$$

οπότε $s_B = 7,376$.

Συνεπώς $\quad cv_A = \dfrac{9,165}{23} = 39,8\% \quad$ και $\quad cv_B = \dfrac{7,376}{19} = 38,8\%$.

Επομένως οι ηλεκτρ. συσκευές και των δύο τύπων παρουσιάζουν σχετικά μεγάλη «ανομοιογένεια» ως προς τη διάρκεια λειτουργίας τους. Ελάχιστα μεγαλύτερη ομοιογένεια παρουσιάζουν οι ηλεκτρ. συσκευές του τύπου Β.

6. α)



β) Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση πριν το Σ.Κ.

i) Η μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους αυτών. Έτσι, το μέσο ποσοστό των πολύ καλά ενημερωμένων για τις $\nu = 15$ χώρες της Ε.Ε. ήταν

$$\overline{\pi} = \frac{\sum \pi_i}{\nu} = \frac{662}{15} \approx 44,1\%.$$

ii) Αντίθετα, όταν οι παρατηρήσεις δεν έχουν την ίδια βαρύτητα,όπως εδώ όπου έχουμε τα ποσοστά των χωρών της Ε.Ε. με διαφορετικό πληθυσμό η καθεμιά, τότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο σταθμικός μέσος με βάρη w_i τον πληθυσμό των χωρών. Τα βάρη αυτά, από τη Γεωγραφία της Β΄ Γυμνασίου (Α. Καραμπάτσα κ.ά.), δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

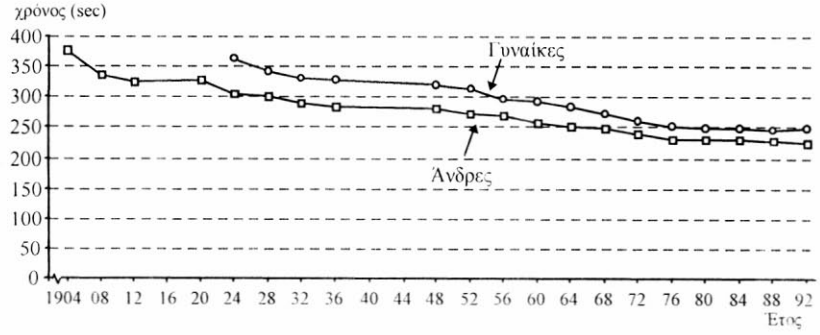
Χώρα	Ποσοστό π_i %	Βάρος w_i	$\pi_i w_i$
Αυστρία	50	8.040.000	402.000.000
Βέλγιο	55	10.131.000	557.205.000
Βρετανία	40	58.276.000	2.331.040.000
Γαλλία	61	58.027.000	3.539.647.000
Γερμανία	44	81.553.000	3.588.332.000
Δανία	51	5.216.000	266.016.000
Ελλάδα	26	10.442.000	271.492.000
Ιρλανδία	41	3.577.000	146.657.000
Ισπανία	30	39.170.000	1.175.100.000
Ιταλία	49	57.248.000	2.805.152.000
Λουξεμβούργο	56	407.000	22.792.000
Ολλανδία	56	15.423.000	863.688.000
Πορτογαλία	18	9.912.000	178.416.000
Σουηδία	40	8.818.000	352.720.000
Φιλανδία	45	5.099.000	229.455.000
Σύνολο	662	371.339.000	16.729.712.000

Άρα το σταθμικό μέσο ποσοστό των πολύ καλά ενημερωμένων πριν το Σ.Κ. ήταν

$$\overline{\pi}_W = \frac{\sum \pi_i w_i}{\sum w_i} = \frac{16.729.712.000}{371.339.000} \approx 45\% .$$

Για το αριθμητικό μέσο ποσοστό των πολύ καλά ενημερωμένων μετά το Σ.Κ. βρίσκουμε $\overline{\pi} = 43{,}9\%$, ενώ το αντίστοιχο σταθμικό μέσο ποσοστό, χρησιμοποιώντας τα ίδια βάρη όπως προηγουμένως, είναι 46%.

7. Μετατρέπουμε τους χρόνους σε δευτερόλεπτα οπότε έχουμε τα παρακάτω χρονογράμματα:



Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια συνεχής βελτίωση του χρόνου μέχρι και τους Ολυμπιακούς αγώνες του 1976. Στη συνέχεια η βελτίωση του χρόνου, τόσο για τους άνδρες όσο και για τις γυναίκες, είναι πολύ μικρή.

8. α) Έχουμε τον πίνακα

Έτος	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1960	1	63	1	63
1961	2	64	4	128
1962	3	64	9	192
1963	4	64	16	256
1964	5	66	25	330
1965	6	65	36	390
1966	7	65	49	455
1967	8	66	64	528
1968	9	66	81	594
1969	10	67	100	670
1970	11	67	121	737
1971	12	67	144	804
1972	13	67	169	871
1973	14	68	196	952
1974	15	68	225	1020
Σύνολο	120	987	1240	7990

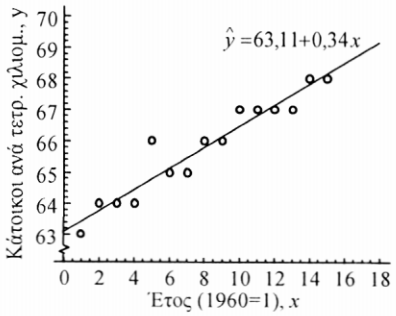
από τον οποίο βρίσκουμε

$$\hat{\beta} = \frac{\nu \sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\nu \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{15 \cdot 7990 - 120 \cdot 987}{15 \cdot 1240 - 120^2} = 0{,}34$$

και

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} = 65{,}8 - 0{,}34 \cdot 8 = 63{,}1\,.$$

Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = 63{,}1 + 0{,}34x$ και παριστάνεται στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς:



β) Για $x = 17$ (έτος 1976) έχουμε $\hat{y} = 63{,}1 + 0{,}34 \cdot 17 = 68{,}9$ κάτοικοι/km^2 που δεν διαφέρει και πολύ από τους 69,5 κατοίκους/ km^2 που είχαμε σύμφωνα την άσκηση.

9. γ) Έχουμε τον πίνακα

Έτος	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1931	1	17,7	1	17,7
1936	6	15,1	36	90,6
1940	10	12,8	100	128,0
1950	20	7,9	400	158,0
1956	26	7,4	676	192,4
1961	31	7,6	961	235,6
1964	34	8,2	1156	278,8
Σύνολο	128	76,7	3330	1101,1

$v = 7$

$\bar{x} = 18{,}29$

$\bar{y} = 10{,}96$

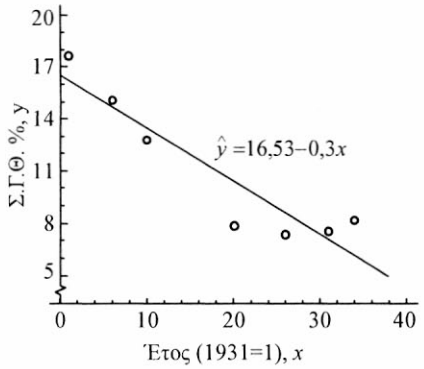
από τον οποίο βρίσκουμε

$$\hat{\beta} = \frac{v\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{v\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{7 \cdot 1101{,}1 - 128 \cdot 76{,}7}{7 \cdot 3330 - 128^2} = -0{,}305$$

και

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} = 10{,}96 + 0{,}305 \cdot 18{,}29 = 16{,}53\,.$$

Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = 16{,}53 - 0{,}3x$ και παριστάνεται στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς.



10. Έχουμε τον πίνακα

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
3,5	1,1	12,25	3,85
3,7	1,5	13,69	5,55
4,2	1,8	17,64	7,56
4,3	1,5	18,49	6,45
6,9	2,5	47,61	17,25
22,6	8,4	109,68	40,66

$v = 5$

$\bar{x} = 4{,}52$

$\bar{y} = 1{,}68$

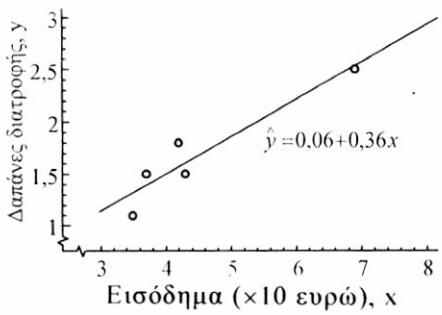
από τον οποίο βρίσκουμε

$$\hat{\beta} = \frac{\nu\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\nu\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{5\cdot 40{,}66 - 22{,}4\cdot 8{,}4}{5\cdot 109{,}68 - 22{,}4^2} = 0{,}36$$

και

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} = 1{,}68 - 0{,}36\cdot 4{,}52 = 0{,}06.$$

Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = 0{,}06 + 0{,}36\,x$ και παριστάνεται στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς.



β)Για x=5 έχουμε

$$\hat{y} = 0{,}06 + 0{,}36\cdot 5$$
$$= 1{,}86\cdot 10\ € = 18{,}6\ €$$

γ) Πρέπει να βρούμε πρώτα την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων της X πάνω στην Y.

11. α) Σύμφωνα με την άσκηση 7(α) Α΄ Ομάδας της §2.5, έχουμε:

$$\frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\frac{1}{\nu}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\frac{1}{\nu}\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - \nu\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x_i^2 - \nu\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\nu\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\nu\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \hat{\beta}$$

δηλαδή $\hat{\beta} = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2}$ (1).

β) Έχουμε:

$$r = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\nu s_{xy}}{\sqrt{\nu s_x^2}\sqrt{\nu s_y^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}\cdot\frac{s_x}{s_y} = \hat{\beta}\cdot\frac{s_x}{s_y}.$$

12.

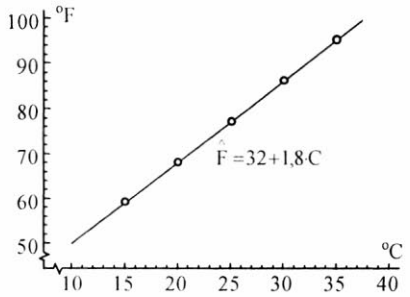
C	F	C^2	F^2	$C \cdot F$
15	59	225	3481	885
20	68	400	4624	1360
25	77	625	5929	1925
30	86	900	7396	2580
35	95	1225	9025	3325
125	385	3375	30455	10075

$$\hat{F} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} C$$

$$v = 5$$

$$\overline{F} = \frac{\Sigma F}{v} = \frac{385}{5} = 77$$

$$\overline{C} = \frac{\Sigma C}{v} = \frac{125}{5} = 25$$



$$\hat{\beta} = \frac{v\Sigma FC - (\Sigma F)(\Sigma C)}{v\Sigma C^2 - (\Sigma C)^2}$$

$$= \frac{5 \cdot 10075 - 385 \cdot 125}{5 \cdot 3375 - 125^2}$$

$$= \frac{2250}{1250} = 1{,}8$$

$$\hat{\alpha} = \overline{F} - \hat{\beta}\overline{C} = 77 - 1{,}8 \cdot 25 = 32 .$$

Άρα $\hat{F} = 32 + 1{,}8C$.

13. Είναι

$$r(X,Z) = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(z_i - \overline{z})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum (z_i - \overline{z})^2}} \qquad (1)$$

Επειδή $Z = \lambda Y$ έχουμε

$$\overline{z} = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_v}{v} = \frac{\lambda y_1 + \lambda y_2 + \ldots + \lambda y_v}{v} = \lambda \overline{y} .$$

Άρα $$z_i - \overline{z} = \lambda y_i - \lambda \overline{y} = \lambda (y_i - \overline{y})$$

και $$\sqrt{\sum (z_i - \overline{z})^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum (y_i - \overline{y})^2} = |\lambda| \sqrt{\sum (y_i - \overline{y})^2} .$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε

$$r(X,Z) = \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum (y_i - \overline{y})^2}} = \frac{\lambda}{|\lambda|} r(X,Y) .$$

Επομένως όταν $\lambda > 0$ ισχύει $r(X,Z) = r(X,Y)$

ενώ $\lambda < 0$ ισχύει $r(X,Z) = -r(X,Y)$.

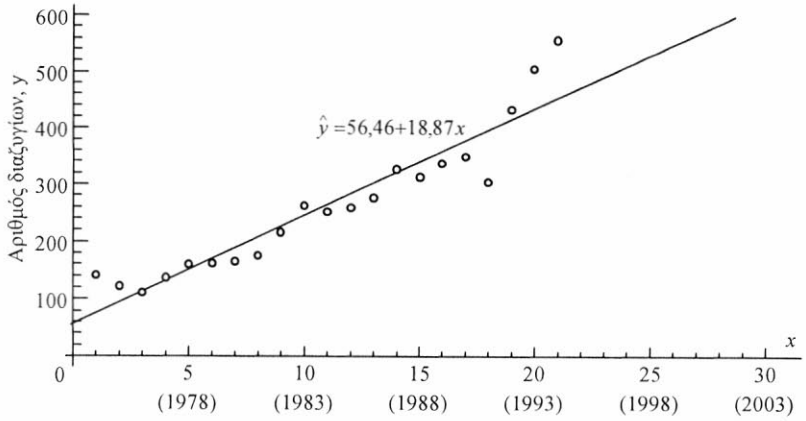
14. Έχουμε

$$\hat{\beta} = \frac{\nu\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\nu\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{21\cdot 75512 - 231\cdot 5544}{21\cdot 3311 - 231^2} = \frac{305088}{16170} = 18{,}87$$

$$\bar{x} = \frac{231}{21} = 11\,, \qquad \bar{y} = \frac{5544}{21} = 264$$

$$\hat{\alpha} = 264 - 18{,}87\cdot 11 = 56{,}46\,.$$

Επομένως η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = 56{,}46 + 18{,}87x$ και παριστάνεται στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς.



- Για το έτος 1995 αντιστοιχεί $x = 22$, οπότε ο προβλεπόμενος αριθμός διαζυγίων είναι $\hat{y} = 56{,}46 + 18{,}87\cdot 22 \approx 472$ διαζύγια
- Για το έτος 2000 αντιστοιχεί $x = 26$, οπότε ο προβλεπόμενος αριθμός διαζυγίων το έτος 2000 θα είναι $\hat{y} = 56{,}46 + 18{,}87\cdot 26 \approx 547$ διαζύγια.

3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Εισαγωγή

Υπάρχει σε πολλούς η εντύπωση ότι το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων προήλθε από το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια. Σημαντική μάλιστα ώθηση στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού των Μαθηματικών αποτέλεσε η γόνιμη αλληλογραφία που αναπτύχθηκε ανάμεσα στους Pascal και Fermat το 17ο αιώνα με αφορμή διάφορα προβλήματα που προέκυψαν από την ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια.

Μολονότι όμως τα τυχερά παιχνίδια ήταν ευρέως διαδεδομένα και στους Αρχαίους Έλληνες και στους Ρωμαίους, η Θεωρία των Πιθανοτήτων δεν αναπτύχθηκε κατά την αρχαιότητα, όπως συνέβη με άλλους κλάδους των Μαθηματικών, αλλά πολύ αργότερα, το 16ο και 17ο αιώνα μ.Χ. Γι'αυτό πολλοί απορρίπτουν την άποψη ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων οφείλει τη γένεσή της στην ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια και την αποδίδουν στις ανάγκες να λυθούν προβλήματα που παρουσιάστηκαν με την ανάπτυξη του εμπορίου, των ασφαλίσεων, της συλλογής εσόδων του κράτους κτλ. Η ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων οφείλεται επίσης και στις ανάγκες των Φυσικών Επιστημών όπως η εφαρμογή της Θεωρίας Σφαλμάτων σε αστρονομικές παρατηρήσεις.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο το 18ο αιώνα με τις αξιοσημείωτες εργασίες των μαθηματικών Bernoulli, De Moivre, Laplace και Gauss. Ιδιαίτερα ο Laplace με τις εργασίες του άνοιξε μια καινούργια εποχή για τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Γιατί ο Laplace δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάλυση των τυχερών παιγνιδιών, αλλά εφαρμόζει τα συμπεράσματά του και σε ένα πλήθος από επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Έτσι, με αφορμή τη μελέτη των σφαλμάτων που προκύπτουν στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου αστρονομικού μεγέθους ανακαλύπτεται η περίφημη κανονική κατανομή του Gauss. Κατόπιν αποδεικνύεται ότι η κανονική κατανομή απεικονίζει όχι μόνο την κατανομή των σφαλμάτων των αστρονομικών παρατηρήσεων αλλά και την κατανομή πολλών βιολογικών, κοινωνικών και φυσικών φαινομένων. Έτσι, στη διάρκεια του 19ου αιώνα γεννιούνται νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών,

όπως είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων, τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική.

Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με τις εργασίες πολλών διάσημων μαθηματικών, όπως είναι οι Chebyshev, Markov, Von Mises, Kolmogorov κ.ά., έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο. Καινούργια θεωρητικά αποτελέσματα παρέχουν νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση των μεθόδων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων αναφέρονται σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως η Φυσική, η Χημεία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Οικονομολογία, η Τηλεπικοινωνία, η Μετεωρολογία κτλ.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ανήκει στους κλάδους των Μαθηματικών που συμβαδίζουν με την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο για τη λύση πρακτικών προβλημάτων των άλλων επιστημών. Απεναντίας έχει μετασχηματιστεί σε έναν αυτοτελή κλάδο των καθαρών Μαθηματικών, που έχει δικά του προβλήματα και δικές του μεθόδους.

3.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πείραμα Τύχης

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, αν θερμάνουμε αποσταγμένο νερό σε 100^0 Κελσίου στην επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, το νερό θα βράσει. Επίσης, αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει στο κενό υπό την επίδραση της βαρύτητας, μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το διάστημα που θα διανύσει σε ορισμένο χρόνο *t*. Κάθε τέτοιο πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** (deterministic) πείραμα.

Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης** (random experiment). Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα σημείο μιας εθνικής οδού, αφού ο αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.

Πειράματα τύχης είναι και τα εξής:

1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.
2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.
3. Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς

το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους.

4. Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε “γράμματα” αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.
5. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.
6. Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.
7. Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετράται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.
8. Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετράται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.
9. Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}.$$

Έτσι, στο πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης, αν με K συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε “κεφαλή” και με Γ το αποτέλεσμα να φέρουμε “γράμματα”, τότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}$. Επίσης, στο δεύτερο από τα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ και $\Gamma = \{6\}$ είναι ενδεχόμενα. Το A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το B να φέρουμε περιττό αριθμό και το Γ να φέρουμε 6. Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, το Γ είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα A και B είναι σύνθετα

ενδεχόμενα. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο $A = \{2, 4, 6\}$ έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

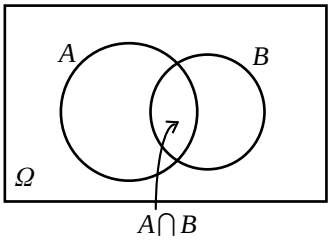
Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι'αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι'αυτό λέμε ότι το $\varnothing$ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$. Επομένως, αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $A = \{2, 4, 6\}$ έχουμε $N(A) = 3$, $N(\Omega) = 6$ και $N(\varnothing\} = 0$.

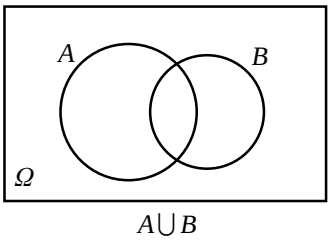
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Όπως είδαμε, τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω. Επομένως, μεταξύ των ενδεχομένων ενός πειράματος μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα. Έτσι, αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

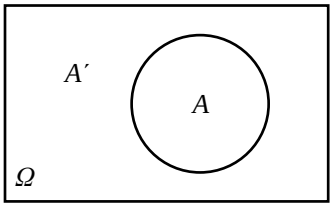
- Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται "A τομή B" ή "A και B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B.



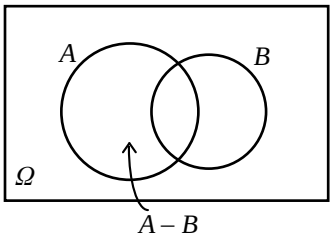
- Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται "A ένωση B" ή "A ή B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.



- Το ενδεχόμενο A', που διαβάζεται "όχι A" ή "συμπληρωματικό του A" και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A. Το A' λέγεται και "αντίθετο του A".



- Το ενδεχόμενο $A-B$, που διαβάζεται "διαφορά του B από το A" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B. Είναι εύκολο να δούμε ότι $A-B=A\cap B'$.



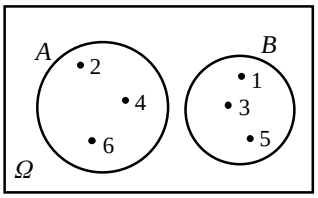
Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega\in A$
Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega\in A'$ (ή $\omega\notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega\in A\cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega\in A\cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega\in(A\cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega\in A-B$ (ή $\omega\in A\cap B'$)
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B	$A\subseteq B$

Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού έστω τα ενδεχόμενα $A=\{1,2,3,4\}$ και $B=\{2,4,6\}$. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 1, τότε τα ενδεχόμενα $A,\ A\cup B,\ A-B,\ B'$ πραγματοποιούνται, ενώ τα $A',\ B,\ (A\cup B)'$, $(A-B)'$, $A\cap B$ δεν πραγματοποιούνται.

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Στη ρίψη ενός ζαριού αν A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό και B το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό, έχουμε $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{1, 3, 5\}$. Παρατηρούμε ότι τα A και B δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή τα A και B λέγονται ασυμβίβαστα. Γενικά:



$A \cap B = \varnothing$

Δύο ενδεχόμενα *A* και *B* λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.
Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.

i) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος *Ω* του πειράματος.

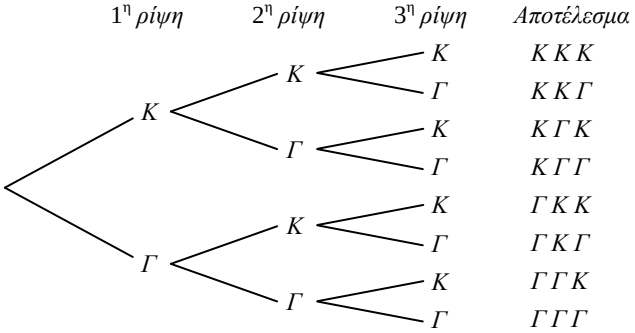
ii) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A_1: "Ο αριθμός των *Κ* υπερβαίνει τον αριθμό των *Γ*"
A_2: "Ο αριθμός των *Κ* είναι ακριβώς 2"
A_3: "Ο αριθμός των *Κ* είναι τουλάχιστον 2"
A_4: "Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις"
A_5: "Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε *Κ*".

iii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A_3', $A_5 \cap A_2$, $A_5 \cup A_4$.

ΛΥΣΗ

i) Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:



Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το *Κ* και το *Γ* και είναι

$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

ii) Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο *Ω* και την αντίστοιχη ιδιότητα έχουμε:

$$A_1 = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$$

$$A_2 = \{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$$

$$A_3 = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$$ (Παρατηρούμε ότι $A_3 = A_1$)

$$A_4 = \{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma\}$$

$$A_5 = \{KKK, K\Gamma\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma\}.$$

iii) Το A_3' περιέχει εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχει το A_3, περιέχει δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ο αριθμός των *Κ* είναι μικρότερος από 2. Επομένως, $A_3' = \{K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$.

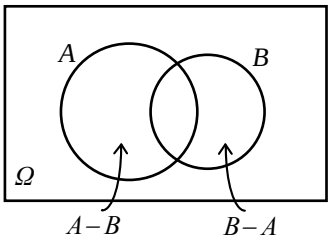
Το ενδεχόμενο $A_5 \cap A_2$ περιέχει τα κοινά στοιχεία των A_5 και A_2, δηλαδή τα στοιχεία με δύο ακριβώς *Κ*, εκ των οποίων το ένα στην πρώτη θέση. Επομένως, $A_5 \cap A_2 = \{KK\Gamma, K\Gamma K\}$.

Το ενδεχόμενο $A_5 \cup A_4$ περιέχει τα στοιχεία που στην πρώτη θέση έχουν *Κ* ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις. Επομένως, $A_5 \cup A_4 = \{KK\Gamma, K\Gamma K, KK\Gamma, KKK, \Gamma\Gamma\Gamma\}$.

2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα *Α* και *Β* ενός πειράματος με δειγματικό χώρο *Ω*. Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:
i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα *Α* και *Β*.
ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα *Α* και *Β*.

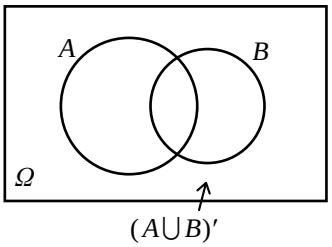
ΛΥΣΗ

i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το *Α* ή μόνο το *Β*, γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των *Α* και *Β* με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.



Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο από τα $A - B$ και $B - A$. Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A - B) \cup (B - A)$ ή ισοδύναμα το $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

ii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Ω που είναι εκτός της ένωσης των A και B. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A \cup B)'$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).

i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη”;
iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα”;

2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση).

3. Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:

i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A: “Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της”.

4. Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γεύμα	Επιλογές
Κύριο πιάτο	Κοτόπουλο ή φιλέτο
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο.

i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος
ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A: "το άτομο επιλέγει παγωτό"
iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο B: "το άτομο επιλέγει κοτόπουλο"
iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο $A \cap B$
v) Αν Γ το ενδεχόμενο: "το άτομο επιλέγει ρύζι", να βρείτε το ενδεχόμενο $(A \cap B) \cap \Gamma$.

5. Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο ασθενή και με 1 τον ασφαλισμένο, και στη συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α, β, γ ή δ, ανάλογα με το αν η κατάστασή του είναι καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς. Να βρείτε:

i) Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.
ii) Το ενδεχόμενο A: "η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος".
iii) Το ενδεχόμενο B: "η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια".
iv) Το ενδεχόμενο Γ: "ο ασθενής είναι ασφαλισμένος".

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα:

i) Ρίχνουμε ένα ζάρι. A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και B είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.
ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. A είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και B το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.
iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα. A είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και B το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.
iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. A είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και B το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

7. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:
Α: "Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης".
Β: "Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός"
Γ: "Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5"
Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $(A \cap B) \cap \Gamma$.

3. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι: αν $A \subseteq B$, τότε $B' \subseteq A'$.

4. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Να γράψετε το ενδεχόμενο $A \cup B$ ως ένωση τριών ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων.

3.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Εισαγωγή

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης, όπως είδαμε, είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν A είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το A θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι'αυτό είναι χρήσιμο να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ενδεχόμενο A έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της "προσδοκίας" με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του A και τον συμβολίζουμε με $P(A)$. Πώς όμως θα προσδιορίσουμε για κάθε ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης την πιθανότητά του; Δηλαδή πώς θα βρούμε μια διαδικασία με την οποία σε κάθε ενδεχόμενο θα αντιστοιχίζουμε την πιθανότητά του; Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά.

Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας

Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται *σχετική συχνότητα του A* και συμβολίζεται με f_A. Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\lambda\}$ και σε ν εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_\lambda)$ πραγματοποιούνται $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}, f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu}, ..., f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{\nu}$ των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

1. $0 \le f_i \le 1, \quad i = 1,2,...,\lambda$ (αφού $0 \le \kappa_i \le \nu$)
2. $f_1 + f_2 + ... + f_\lambda = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_\lambda}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$.

Ας εκτελέσουμε τώρα το ακόλουθο πείραμα: Ρίχνουμε ένα συμμετρικό και ομογενές νόμισμα και σημειώνουμε με K το αποτέλεσμα "κεφαλή" και με Γ το αποτέλεσμα "γράμματα".

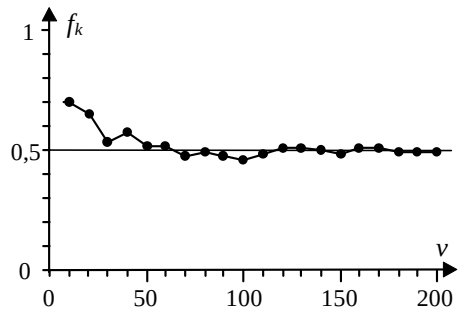
Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται το πλήθος των K και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες στις 10, 20, 30,…,200 ρίψεις του νομίσματος ενώ στο σχήμα 1 παριστάνεται το αντίστοιχο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων

Πίνακας
ρίψεων ενός νομίσματος

ν	κ	f_κ
10	7	0,700
20	13	0,650
30	16	0,533
40	23	0,575
50	26	0,520
60	31	0,517
70	33	0,471
80	39	0,488
90	43	0,478
100	46	0,460
110	53	0,482
120	61	0,508
130	66	0,508
140	70	0,500
150	73	0,486
160	81	0,506
170	87	0,512
180	89	0,494
190	93	0,489
200	99	0,495

Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων

1



Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός ν των ρίψεων η σχετική συχνότητα f_κ εμφάνισης της "κεφαλής" σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή, όπως λέμε "τείνει" στον αριθμό 0,5. Αυτό επιβεβαιώνει την "προσδοκία" μας ότι στη ρίψη ενός συμμετρικού και ομογενούς νομίσματος ή, όπως λέμε, ενός "αμερόληπτου" νομίσματος, οι σχετικές συχνότητες των ενδεχομένων $\{K\}, \{\Gamma\}$ είναι ίσες. Ανάλογα

παραδείγματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα** ή **νόμος των μεγάλων αριθμών**.
Θα προσπαθήσουμε τώρα στηριζόμενοι στις προηγούμενες διαπιστώσεις να ορίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση του αμερόληπτου νομίσματος. Ρίχνουμε ένα τέτοιο νόμισμα και παρατηρούμε την όψη που θα εμφανιστεί. Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα $\{K\}, \{\Gamma\}$ τείνει στον αριθμό $\frac{1}{2}$. Ομοίως θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε ότι στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$ και $\{6\}$ τείνει στον αριθμό $\frac{1}{6}$. Σε πειράματα όπως τα προηγούμενα λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ή, ισοδύναμα, τα απλά ενδεχόμενα είναι **ισοπίθανα**.
Ας δούμε τώρα ποια αναμένουμε να είναι η σχετική συχνότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα.
Έστω για παράδειγμα, το ενδεχόμενο να φέρουμε ζυγό αριθμό στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Επειδή το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι 2 ή 4 ή 6 και καθένα από τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζεται με σχετική συχνότητα $\frac{1}{6}$, η συχνότητα εμφάνισης του ζυγού αριθμού αναμένεται να είναι $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$.
Γενικά, σε ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$. Γι'αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Έτσι, έχουμε τον **κλασικό** ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον

Laplace το 1812.
Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $P(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$
2. $P(\varnothing) = \dfrac{0}{N(\Omega)} = 0$
3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \le P(A) \le 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, είναι απαραίτητο τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα. Υπάρχουν όμως πολλά πειράματα τύχης, των οποίων ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Όπως για παράδειγμα ο αριθμός των αυτοκινητιστικών δυστυχημάτων μια ορισμένη εβδομάδα, η ρίψη ενός ζαριού που δεν είναι συμμετρικό κτλ. Για τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει ανάλογες ιδιότητες με τη σχετική συχνότητα.

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.
Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\} \ne \varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing) = 0$.

Αν $P(\omega_i) = \dfrac{1}{\nu}$, $i = 1,2,...,\nu$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Στην πράξη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που δεν ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου A λαμβάνεται το όριο της σχετικής του συχνότητας.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση "παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω", εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$, $i = 1,2,...,\nu$.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως "κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων". Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

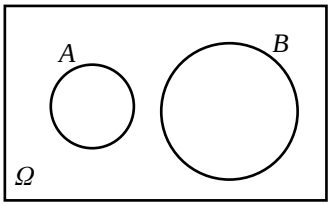
1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.
Επομένως:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} \\ &= P(A) + P(B). \end{aligned}$$



$A \cup B$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$\boxed{P(A') = 1 - P(A)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

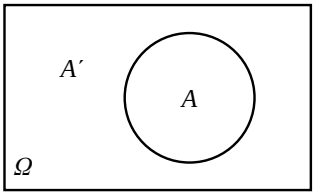
Επειδή $A \cap A' = \varnothing$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A').$$

Οπότε $\quad P(A') = 1 - P(A)$.



3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

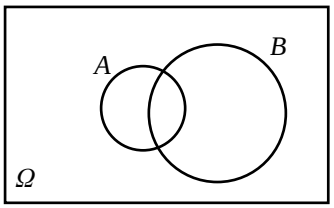
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:



$A \cup B$

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

4. $\boxed{\text{Αν } A \subseteq B \text{, τότε } P(A) \le P(B)}$

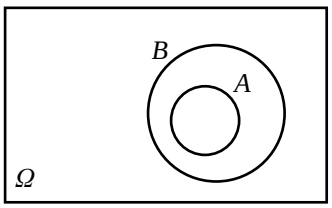
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \le N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \le \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

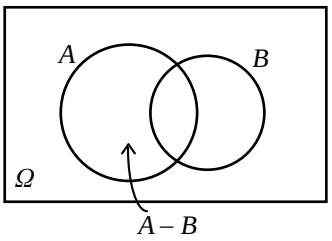
$$P(A) \le P(B).$$



5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B)\cup(A\cap B)=A$, έχουμε:

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)\,.$$

Άρα $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ρίχνουμε δύο "αμερόληπτα" ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

ΛΥΣΗ

- Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος, χρησιμοποιούμε έναν πίνακα "διπλής εισόδου", όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

1ο \ 2ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Από τον πίνακα αυτόν έχουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω έχει 36 ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή $N(\Omega)=36$.

- Το ενδεχόμενο A: "να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς", είναι το

$$A=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6)(6,5)\}$$

δηλαδή $N(A)=10$

- Επομένως, $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$.

Άρα, η πιθανότητα να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς είναι $\frac{5}{18} \approx 0{,}28$ ή, στη γλώσσα των ποσοστών, περίπου 28%.

2. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ και $P(A \cap B) = 0{,}2$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

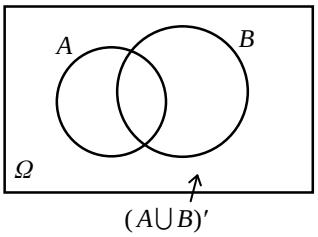
i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.

ii) **Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.**

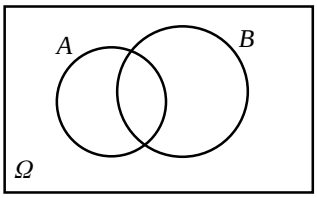
ΛΥΣΗ

i) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B είναι το $(A \cup B)'$. Επομένως

$$\begin{aligned} P((A \cup B)') &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - (0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2) \\ &= 1 - 0{,}7 \\ &= 0{,}3. \end{aligned}$$



ii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B είναι το $(A - B) \cup (B - A)$. Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:



$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A)$$

$$\begin{aligned} &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= 0{,}5 + 0{,}4 - 2 \cdot 0{,}2 \\ &= 0{,}5. \end{aligned}$$

3. Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}5$.

i) Να εξεταστεί αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

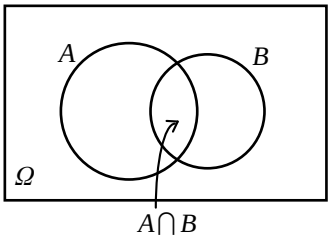
ii) Να αποδείξετε ότι $0{,}1 \le P(A \cap B) \le 0{,}5$.

ΛΥΣΗ

i) Αν τα A και B ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα είχαμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}6 + 0{,}5 = 1{,}1$$

ισχύει, δηλαδή, $P(A \cup B) > 1$, που είναι άτοπο. Άρα, τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.



ii) Επειδή $A \cap B \subseteq B$ και $A \cap B \subseteq A$,έχουμε

$P(A \cap B) \le P(B)$ και $P(A \cap B) \le P(A)$,

επομένως $P(A \cap B) \le 0{,}5$ (1)

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - P(A \cap B).$$

Όμως $P(A \cup B) \le 1$.

Επομένως: $0{,}6 + 0{,}5 - P(A \cap B) \le 1$

$$0{,}6 + 0{,}5 - 1 \le P(A \cap B)$$

$$0{,}1 \le P(A \cap B). \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0{,}1 \le P(A \cap B) \le 0{,}5.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων i) το χαρτί να είναι πέντε ii) το χαρτί να μην είναι πέντε.

2. Να βρείτε την πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο

"γράμματα".

3. Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:
i) μαύρη ii) άσπρη ή μαύρη iii) ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

4. Σε μια τάξη με 30 μαθητές, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέλφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία από την τάξη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά.

5. Έστω τα σύνολα $\Omega = \{\omega \in \mathbf{N} / 10 \le \omega \le 20\}$, $A = \{\omega \in \Omega / \omega$ πολλαπλάσιο του 3$\}$ και $B = \{\omega \in \Omega / \omega$ πολλαπλάσιο του 4$\}$. Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα στοιχείο του Ω, να βρείτε τις πιθανότητες i) να ανήκει στο A ii) να μην ανήκει στο B.

6. Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα i) να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος ii) να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.

7. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{17}{30}$, $P(B) = \frac{7}{15}$ και $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$.

8. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Να βρείτε την $P(B)$.

9. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι $P(A) = P(B)$, $P(A \cup B) = 0{,}6$ και $P(A \cap B) = 0{,}2$. Να βρείτε την $P(A)$.

10. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Να βρείτε την $P(A \cup B)$.

11. Για δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι

$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

12. Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;

13. Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει
α) τουλάχιστον μία ασθένεια; β) μόνο μία ασθένεια;

14. Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε $P(A) = \kappa$, $P(B) = \lambda$ και $P(A \cap B) = \mu$, να βρείτε τις πιθανότητες:
i) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A και B
ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B
iii) να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

2. Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.

3. Αν $\dfrac{P(A)}{P(A')} = \dfrac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.

4. Αν $0 < P(A) < 1$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{P(A)} + \dfrac{1}{P(A')} \geq 4$.

5. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}7$, να δείξετε ότι $0{,}3 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}6$.

6. Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι

$$P(B) - P(A') \leq P(A \cap B)\,.$$

3.3 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Είδαμε ότι όταν ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης έχει πεπερασμένο πλήθος απλών ενδεχομένων και τα απλά αυτά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Επομένως, όταν έχουμε ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, ο υπολογισμός της $P(A)$ ανάγεται στην απαρίθμηση των στοιχείων των συνόλων Ω και A.

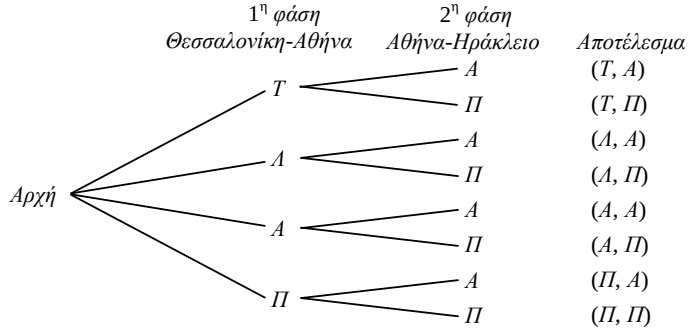
Σε πολλά προβλήματα όμως, η απευθείας απαρίθμηση των στοιχείων του δειγματικού χώρου και των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν είναι δύσκολη ή και πρακτικά αδύνατη. Στις περιπτώσεις αυτές η απαρίθμηση διευκολύνεται με τις επόμενες μεθόδους της Συνδυαστικής η οποία είναι ένας από τους βασικούς κλάδους των Μαθηματικών.

Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος επιθυμεί να ταξιδέψει από τη Θεσσαλονίκη, μέσω Αθηνών, στο Ηράκλειο Κρήτης χωρίς να χρησιμοποιήσει το ΙΧ αυτοκίνητό του. Από τη Θεσσαλονίκη μπορεί να ταξιδέψει στην Αθήνα με τρένο (T) ή λεωφορείο ($Λ$) ή αεροπλάνο (A) ή πλοίο ($Π$) και από την Αθήνα στο Ηράκλειο με πλοίο ή αεροπλάνο. Ενδιαφερόμαστε για τους διαφορετικούς τρόπους ως προς το ταξιδιωτικό μέσο με τους οποίους μπορεί να πάει κάποιος από τη Θεσσαλονίκη στο Ηράκλειο.

Το ταξίδι λοιπόν γίνεται σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η μετάβαση από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα και η δεύτερη από την Αθήνα στο Ηράκλειο. Η πρώτη φάση του ταξιδιού μπορεί να γίνει με 4 τρόπους και η δεύτερη με 2 τρόπους. Σε κάθε τρόπο της πρώτης φάσης αντιστοιχούν οι δύο τρόποι της δεύτερης φάσης. Άρα το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο μπορεί να γίνει με $4 \cdot 2 = 8$ διαφορετικούς τρόπους.

Τα παραπάνω φαίνονται παραστατικά στο επόμενο **δεντροδιάγραμμα**:



Γενικά ισχύει η επόμενη **βασική αρχή απαρίθμησης**:

> Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε *ν* διαδοχικές φάσεις $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_\nu$. Αν η φάση φ_1 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_1 τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση φ_2 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_2 τρόπους ,…, και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση φ_ν μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_ν τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot ... \cdot \kappa_\nu$ τρόπους.

Επομένως, αν με μια διαδικασία η οποία πραγματοποιείται όπως ορίστηκε προηγουμένως, στην πρώτη φάση συμπληρώνεται το πρώτο στοιχείο μιας διατεταγμένης *ν*-άδας με κ_1 τρόπους, στη δεύτερη φάση το δεύτερο στοιχείο με κ_2 τρόπους ,…, στη *ν*-οστή φάση το *ν*-στό στοιχείο με κ_ν, τότε σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης μπορούν να σχηματισθούν $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot ... \cdot \kappa_\nu$ διαφορετικές διατεταγμένες *ν*-άδες.

Διατάξεις

Ας υποθέσουμε ότι μία επιτροπή με 5 μαθητές συνεδριάζει για να εκλέξει πρόεδρο, γραμματέα, και ταμία. Αν θέλουμε να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών τριάδων που θα εκλεγούν για τις τρεις θέσεις σκεπτόμαστε ως εξής:

$1^η$ *θέση*	$2^η$ *θέση*	$3^η$ *θέση*
5 *τρόποι*	4 *τρόποι*	3 *τρόποι*

Η διαδικασία εκλογής μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις: 1η φάση εκλογή προέδρου, 2η φάση εκλογή γραμματέα και 3η φάση εκλογή ταμία. Η 1η φάση μπορεί να γίνει με 5 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής. Η 2η φάση μπορεί να γίνει με 4 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα από την εκλογή του προέδρου. Η 3η φάση μπορεί να γίνει με 3 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα και από την εκλογή του ταμία. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των διαφορετικών δυνατών τριάδων είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Καθεμιά από τις παραπάνω τριάδες λέγεται **διάταξη** των 5 ανά 3.

Γενικά:
Διάταξη των *ν* στοιχείων ενός συνόλου *Α* ανά *κ*, με *κ≤ν*, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε *κ* διαφορετικά στοιχεία του *Α* και να τα βάλουμε σε μια σειρά.
Το πλήθος των διατάξεων των *ν* ανά *κ* συμβολίζεται με Δ_κ^ν και αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{\Delta_{\kappa}^{\nu} = \nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-\kappa+1)} \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο διατάξεις των ν ανά κ είναι διαφορετικές αν διαφέρουν ως προς ένα τουλάχιστον στοιχείο ή ως προς τη θέση που κατέχουν τα στοιχεία. Για παράδειγμα, οι διατάξεις (1, 2, 3), (1, 4, 3) και (3, 2, 1) είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που πάρουμε και τα ν στοιχεία ενός συνόλου A και τα βάλουμε σε μια σειρά, τότε έχουμε μια διάταξη των ν στοιχείων ανά ν η οποία λέγεται **μετάθεση** των ν στοιχείων. Το πλήθος Δ_{ν}^{ν} των μεταθέσεων των ν στοιχείων συμβολίζεται με M_{ν} και σύμφωνα με τον τύπο (1) είναι

$$M_{\nu} = \nu(\nu-1)(\nu-2)...3\cdot 2\cdot 1.$$

Το γινόμενο $1\cdot 2\cdot 3...(\nu-2)(\nu-1)\nu$ συμβολίζεται με $\nu!$ και διαβάζεται ***ν* παραγοντικό**. Επομένως

$$\boxed{M_{\nu} = \nu!} \qquad (2)$$

Έτσι, αν στο προηγούμενο παράδειγμα θέλουμε να βάλουμε τους 5 μαθητές σε μια σειρά, τότε υπάρχουν $M_5 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τους τοποθετήσουμε

Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο του παραγοντικού για να εκφράσουμε το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ με $\kappa < \nu$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta_{\kappa}^{\nu} &= \nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-\kappa+1)\\ &= \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-\kappa+1)(\nu-\kappa)(\nu-\kappa-1)...3\cdot 2\cdot 1}{(\nu-\kappa)(\nu-\kappa-1)...3\cdot 2\cdot 1}\\ &= \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\boxed{\Delta_{\kappa}^{\nu} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}} \qquad (3)$$

Αν τώρα θέλουμε ο τύπος (3) να ισχύει και για $\kappa = \nu$, επειδή $\Delta_{\nu}^{\nu} = M_{\nu} = \nu!$, πρέπει $\frac{\nu!}{0!} = \nu!$. Είναι λοιπόν λογικό να ορίσουμε **0!=1**.

Συνδυασμοί

Ας υποθέσουμε ότι από 5 άτομα A, B, Γ, Δ και E θέλουμε να επιλέξουμε μια ομάδα 3 ατόμων, χωρίς να μας ενδιαφέρει η κατάταξη μέσα σ'αυτήν την ομάδα. Αν x είναι ο αριθμός των διαφορετικών ομάδων που μπορούμε να επιλέξουμε, τότε από κάθε τέτοια ομάδα μπορούν να προκύψουν 3! διατεταγμένες ομάδες. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των διατεταγμένων ομάδων θα είναι 3!x. Ο αριθμός αυτός όμως είναι το πλήθος των διατάξεων Δ_3^5.

Επομένως, θα είναι $\Delta_3^5 = 3!\,x$, οπότε $x = \dfrac{\Delta_3^5}{3!} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{120}{6\cdot 2} = 10$.

Πιο συγκεκριμένα οι ομάδες αυτές θα είναι:

$\{A, B, \Gamma\}$, $\{A, B, \Delta\}$, $\{A, B, E\}$, $\{A, \Gamma, \Delta\}$, $\{A, \Gamma, E\}$, $\{A, \Delta, E\}$, $\{B, \Gamma, \Delta\}$, $\{B, \Gamma, E\}$, $\{B, \Delta, E\}$, και $\{\Gamma, \Delta, E\}$. Κάθε τέτοια επιλογή λέγεται **συνδυασμός** των 5 ανά 3.

Γενικά:

Συνδυασμός των *ν* στοιχείων ενός συνόλου *Α* ανά *κ* λέγεται κάθε υποσύνολο του *Α* με *κ* στοιχεία.

Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$ και αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\Delta_\kappa^\nu}{\kappa!} = \frac{\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}}{\kappa!} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}.$$

Επομένως,

$$\boxed{\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}.}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο συνδυασμοί των ν ανά κ είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστον στοιχείο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Στο τυχερό παιχνίδι του ΠΡΟΠΟ συμπληρώνουμε καθεμιά από τις 13 θέσεις με ένα από τα στοιχεία 1, 2, Χ που αντιστοιχούν σε πρόβλεψη: νίκης της γηπεδούχου ομάδας (1), νίκης της φιλοξενούμενης ομάδας (2), ισοπαλίας (Χ).

i) Να προσδιοριστεί το πλήθος των διαφορετικών στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε.

ii) Αν συμπληρώσουμε τυχαία μια στήλη ΠΡΟΠΟ, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων *A*: "να πιάσουμε ακριβώς 12 αγώνες".
**
B: "να πιάσουμε ακριβώς 11 αγώνες".**

ΛΥΣΗ

i) Μια στήλη ΠΡΟΠΟ είναι μια 13-άδα, στην οποία κάθε θέση μπορεί να συμπληρωθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά $\underbrace{3\cdot 3\cdot 3...3}_{13\ \text{παράγοντες}} = 3^{13} = 1.594.323$ διαφορετικές στήλες.

ii) •Ευνοϊκή περίπτωση για το *A* είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 12 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και η εναπομένουσα θέση συμπληρώνεται με λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν $\binom{13}{12}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους 12 αγώνες που συμπληρώνονται με το σωστό αποτέλεσμα, και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε τον αγώνα που απομένει με λάθος πρόβλεψη. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το *A* είναι $N(A) = \binom{13}{12}\cdot 2$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{13}{12}\cdot 2}{3^{13}} = \frac{13\cdot 2}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}} \approx 0{,}000016\,.$$

• Ευνοϊκή περίπτωση για το *B* είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 11 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις συμπληρώνεται με μια λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν $\binom{13}{11}$ τρόποι για να επιλέξουμε τις 11 θέσεις με το σωστό αποτέλεσμα και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις με λαθεμένη πρόβλεψη. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το *B* είναι

$N(B)=\binom{13}{11}\cdot 2\cdot 2$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{\binom{13}{11}\cdot 2\cdot 2}{3^{13}}=\frac{312}{3^{13}}\approx 0{,}000196\,.$$

2. Στο τυχερό παιχνίδι του ΛΟΤΤΟ "6 από 49", αν παίξουμε μια στήλη, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου *A*: "να πετύχουμε 4 ακριβώς σωστά νούμερα";

ΛΥΣΗ

Επειδή τελικά δεν έχει σημασία η σειρά κλήρωσης του κάθε αριθμού, οι δυνατές περιπτώσεις του πειράματος είναι τόσες όσοι και οι συνδυασμοί των 49 ανά 6, δηλαδή $N(\Omega)=\binom{49}{6}$.

Για να βρούμε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων σκεφτόμαστε ως εξής: Υπάρχουν $\binom{6}{4}$ τρόποι για να επιλέξουμε 4 σωστά νούμερα από τα 6 που κληρώθηκαν. Στη συνέχεια μένουν $\binom{49-6}{6-4}=\binom{43}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα 2 λάθος νούμερα. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι $N(A)=\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}$. Άρα

$$P(A)=\frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}=\frac{13545}{13983816}\approx 0{,}000969 \text{ ή } 1‰ \text{ περίπου.}$$

3. Ποια είναι η πιθανότητα μεταξύ *κ* μαθητών ($\kappa\le 365$) δύο τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; (Ο χρόνος υπολογίζεται με 365 μέρες).

ΛΥΣΗ

Αν *A* είναι το ενδεχόμενο "δύο τουλάχιστον μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα", τότε A' είναι το ενδεχόμενο "οι *κ* μαθητές να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές μέρες" και ισχύει $P(A)=1-P(A')$. Επομένως ο υπολογισμός της

$P(A)$ ανάγεται στον υπολογισμό της $P(A')$. Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος είναι $N(\Omega) = 365 \cdot 365 \cdot 365 \cdots 365 = 365^{\kappa}$, αφού ένας μαθητής μπορεί να έχει γεννηθεί σε μια από τις 365 μέρες του έτους. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το A' είναι $365 \cdot (365-1) \cdot (365-2)...[(365-(\kappa-1)]$, αφού οι κ μαθητές πρέπει να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές μέρες του έτους. Επομένως,

$$P(A') = \frac{365 \cdot (365-1) \cdot (365-2)...(365-\kappa+1)}{365^{\kappa}} = \frac{365 \cdot 364...(365-\kappa+1)}{365^{\kappa}}.$$

Άρα $$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364...(365-\kappa+1)}{365^{\kappa}}.$$

Οι τιμές του $P(A)$ για μερικές τιμές του κ δίνονται στον επόμενο πίνακα:

κ	10	20	23	30	60	70
$P(A)$	0,117	0,411	0,507	0,706	0,994	0,999

Παρατηρούμε ότι ήδη μεταξύ 23 ατόμων η πιθανότητα δύο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα είναι μεγαλύτερη από 50%, ενώ μεταξύ 70 ατόμων το ενδεχόμενο αυτό είναι σχεδόν βέβαιο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν κάποιος διαθέτει 3 σακάκια, 4 παντελόνια, 5 πουκάμισα, 10 ζευγάρια κάλτσες και 2 ζευγάρια παπούτσια, με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη; Ποια είναι η πιθανότητα να φοράει ένα ορισμένο σακάκι;

2. Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να κατασκευάσουμε που να περιέχουν στη σειρά τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό; Ποια είναι η πιθανότητα μια τέτοια πινακίδα να αρχίζει με φωνήεν και να τελειώνει σε άρτιο ψηφίο;

3. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις μιας σειράς; Ποιά είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να μείνει κενή;

4. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια

και όλα μαζί τα κορίτσια;

5. Να αποδείξετε ότι $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$.

6. Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία $A_1, A_2, ..., A_8$. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά; Ποια είναι η πιθανότητα ένα από τα παραπάνω τμήματα που επιλέγεται τυχαία να μη διέρχεται από το σημείο A_1;

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 φτιάχνουμε τετραψήφιους αριθμούς στους οποίους το κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερο από μια φορά. Αν πάρουμε τυχαία έναν τέτοιο αριθμό, ποια είναι η πιθανότητα να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά;

2. Από το σύνολο των μεταθέσεων των στοιχείων 1, 2, 3, …, ν επιλέγουμε τυχαίως μία. Να βρείτε ποια είναι η πιθανότητα να μην αρχίζει από 1.

3. Δέκα φίλοι, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και ο Νίκος, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας και ο Νίκος να καθίσουν σε διπλανές θέσεις; Ποια η πιθανότητα να παρεμβάλλονται άλλοι ανάμεσά τους;

4. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα άτομα να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους.

5. Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαίως 4 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
i) τα άτομα να είναι γυναίκες ii) ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας
iii) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.

6. Ένα κουτί περιέχει 20 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 5 είναι ελαττωματικές. Επιλέγουμε τυχαίως 4 ασφάλειες και τις δοκιμάζουμε. Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου το κουτί να γίνει αποδεκτό.

7. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2. Στην ε_1 ορίζουμε 10 σημεία και στην ε_2 20 σημεία. Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά; Αν

επιλέξουμε τυχαίως ένα τέτοιο τρίγωνο, ποια είναι η πιθανότητα να έχει μία πλευρά του στην ε_1;

8. Ρίχνουμε ένα νόμισμα *ν* φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να μη φέρουμε σε δύο διαδοχικές ρίψεις ίδιο αποτέλεσμα.

9. Ο υπάλληλος ενός χώρου στάθμευσης δίνει τυχαία τα τρία κλειδιά αυτοκινήτων στους τρεις κατόχους των αυτοκινήτων αυτών. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: "Κάθε οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί"
Β: "Μόνο ένας οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί"
Γ: "Κανένας οδηγός να μην πάρει το δικό του κλειδί".

10. Από μια τάξη στην οποία φοιτούν 10 κορίτσια και 12 αγόρια επιλέγονται στην τύχη τρία άτομα για να εκπροσωπήσουν την τάξη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα επιλεγμένα άτομα να είναι του ίδιου φύλου.

11. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε τουλάχιστον ένα "έξι" σε 4 ρίψεις ενός ζαριού και να τη συγκρίνετε με την πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον μια φορά "εξάρες" σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.

3.4 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ - ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Για το διοικητικό συμβούλιο μιας επιχείρησης θα εκλεγεί ένας αντιπρόσωπος. Υποψήφιοι είναι 7 άνδρες και 8 γυναίκες. Από τους υποψηφίους 3 άνδρες και 6 γυναίκες είναι διοικητικοί υπάλληλοι, ενώ 4 άνδρες και 2 γυναίκες είναι τεχνικοί υπάλληλοι. Σύμφωνα με αυτά τα δεδομένα οι υποψήφιοι μπορούν να ταξινομηθούν στον ακόλουθο πίνακα ως εξής:

	Διοικητικός	Τεχνικός	Άθροισμα γραμμής
Άνδρας	3	4	7
Γυναίκα	6	2	8
Άθροισμα στήλης	9	6	15

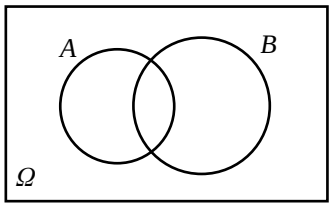
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: "Να εκλεγεί διοικητικός"

B: “Να εκλεγεί γυναίκα”.

Με την παραδοχή ότι τα 15 στοιχεία του δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα, έχουμε $P(A)=\frac{9}{15}$ και $P(B)=\frac{8}{15}$.

Ύστερα από την εκλογή και πριν από την ανακοίνωση του αποτελέσματος έγινε γνωστό ότι εκλέγεται γυναίκα. Αυτό συνεπάγεται ότι ο αντιπρόσωπος θα είναι μία από τις 8 γυναίκες και επομένως η πιθανότητα να εκλεγεί διοικητικός γίνεται $\frac{6}{8}$. Αυτή λοιπόν είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου: “Να εκλεγεί διοικητικός με δεδομένο ότι έχει ήδη εκλεγεί γυναίκα”. Το ενδεχόμενο αυτό συμβολίζεται με $A|B$ και η πιθανότητα του $P(A|B)$ λέγεται **δεσμευμένη πιθανότητα** του *A* με δεδομένο το *B*, δηλαδή $P(A|B)=\frac{6}{8}\neq P(A)$. Ομοίως βρίσκουμε ότι $P(B|A)=\frac{6}{9}\neq P(B)$.



Γενικά, έστω *A* και *B* δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου *Ω* με $P(B)>0$. Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε την πιθανότητα του *A* με δεδομένο ότι το *B* έχει ήδη πραγματοποιηθεί.

Αφού έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο *B*, η απλή λογική μας λέει ότι πρέπει να περιοριστούμε στα στοιχεία του *B* και από αυτά να βρούμε ποια είναι τα ευνοϊκά για το *A*. Με άλλα λόγια η πληροφορία για την πραγματοποίηση του *B* περιορίζει το δειγματικό χώρο *Ω* στο *B* και το ενδεχόμενο *A* στο $A\cap B$. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι ο δειγματικός χώρος *Ω* αποτελείται από ισοπίθανα αποτελέσματα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A|B)=\frac{N(A\cap B)}{N(B)}=\frac{\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}}{\frac{N(B)}{N(\Omega)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Η πιθανότητα αυτή λέγεται **δεσμευμένη πιθανότητα του *A* με δεδομένο το *B***. Γενικά:

Αν *A* και *B* είναι δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος και $P(B)>0$, τότε ο

λόγος $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ λέγεται δεσμευμένη πιθανότητα του A με δεδομένο το B και συμβολίζεται με $P(A \mid B)$. Δηλαδή:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ομοίως, αν $P(A) > 0$, τότε $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα η πιθανότητα να εκλεγεί διοικητικός με δεδομένο ότι έχει εκλεγεί γυναίκα είναι:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{6}{8} \quad \text{και} \quad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{6}{9}.$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B).}$$

Οι παραπάνω ισότητες εκφράζουν τον **πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων**.

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A, με δεδομένο ότι το ενδεχόμενο B έχει ήδη πραγματοποιηθεί, είναι $P(A \mid B) = \frac{6}{8}$, ενώ $P(A) = \frac{9}{15}$. Δηλαδή, $P(A \mid B) \neq P(A)$. Με άλλα λόγια η πραγματοποίηση του B επηρέασε την πιθανότητα πραγματοποίησης του A.

Υπάρχουν όμως και ενδεχόμενα στα οποία η πληροφορία για την πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου. Για παράδειγμα, αν στο πείραμα της ρίψης δύο ζαριών θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A: “Το πρώτο ζάρι να φέρει 1” και B: “Το δεύτερο ζάρι να φέρει άρτιο”, έχουμε:

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}, \quad P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad P(A\cap B)=\frac{3}{36}.$$

Επομένως, $P(A\,|\,B)=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$ και $P(B\,|\,A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι $P(A\,|\,B)=P(A)$ και $P(B\,|\,A)=P(B)$. Γι'αυτό λέμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι **ανεξάρτητα**. Γενικά:

> Δύο ενδεχόμενα A και B με $P(A)>0$ και $P(B)>0$ λέγονται ανεξάρτητα, αν και μόνον αν $P(A\,|\,B)=P(A)$ και $P(B\,|\,A)=P(B)$.

Λαμβάνοντες υπόψη τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων συμπεραίνουμε ότι για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα έχουμε $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. Η ισότητα αυτή χρησιμοποιείται και ως ορισμός των ανεξάρτητων ενδεχομένων, χωρίς μάλιστα τον περιορισμό $P(A)>0$ και $P(B)>0$. Δηλαδή:

> Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ανεξάρτητα, αν
> $$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Δύο ενδεχόμενα που δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται **εξαρτημένα**.

ΣΧΟΛΙΟ

Με την ισότητα $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ μπορούμε να διαπιστώσουμε αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. Στην πράξη, όμως, η ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων ή ισχύει από μόνη της, λόγω της φύσης του πειράματος ή έχει περιληφθεί στις υποθέσεις κατασκευής του μοντέλου που περιγράφει κάποια φαινόμενα.

Για παράδειγμα, είναι εύλογο να δεχτούμε ότι είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα A: "ο συμπλέκτης του αυτοκινήτου είναι σε καλή κατάσταση" και B: "η μπαταρία του αυτοκινήτου είναι σε καλή κατάσταση".

Αντιθέτως, είναι λάθος να δεχτούμε ως ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα
A: "Ένα άτομο είναι μανιώδης καπνιστής" και B: "Ένα άτομο θα προσβληθεί από ασθένεια των πνευμόνων".

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Για την ασφαλή πτήση ενός αεροπλάνου με δύο κινητήρες, πρέπει να δουλεύει ο ένας τουλάχιστον κινητήρας. Οι κινητήρες δουλεύουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να πάθει κάποιος κινητήρας βλάβη είναι 0,003, να βρεθεί η πιθανότητα για μια ασφαλή πτήση.

ΛΥΣΗ

Το αεροπλάνο δεν εκτελεί ασφαλή πτήση, όταν πάθουν βλάβη και οι δύο κινητήρες. Επειδή οι κινητήρες λειτουργούν ανεξαρτήτως ο ένας από τον άλλον, η πιθανότητα να πάθουν βλάβη και οι δύο συγχρόνως είναι ίση με $0{,}003 \cdot 0{,}003$. Άρα, η πιθανότητα μιας ασφαλούς πτήσης είναι ίση με

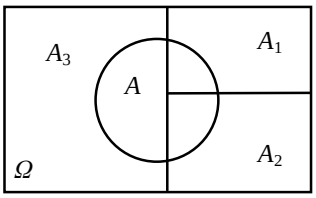
$$1 - 0{,}003 \cdot 0{,}003 = 0{,}999991 \quad \text{δηλαδή} \quad 99{,}9991\% .$$

2. Από τρεις όμοιες μηχανές ενός εργοστασίου η πρώτη (I) παράγει το 20%, η δεύτερη (II) το 30% και η τρίτη (III) το 50% της συνολικής παραγωγής ενός εξαρτήματος. Επιπλέον, το 5% της παραγωγής της μηχανής I, το 4% της II και το 2% της III είναι ελαττωματικά εξαρτήματα. Δύο ερωτήσεις του λεγόμενου ποιοτικού ελέγχου είναι οι εξής:

i) Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα εξάρτημα σε ένα κατάστημα πωλήσεων ποια είναι η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό;

ii) Αν ένα εξάρτημα που επιλέχθηκε τυχαία είναι ελαττωματικό, ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από τη μηχανή I;

ΛΥΣΗ



Αν A_1, A_2 και A_3 είναι τα ενδεχόμενα το επιλεγμένο εξάρτημα να προέρχεται από τις μηχανές I, II και III αντιστοίχως, τότε $P(A_1) = 0{,}2$, $P(A_2) = 0{,}3$ και $P(A_3) = 0{,}5$. Τα A_1, A_2 και A_3 είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και επιπλέον $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$.

Αν A είναι το ενδεχόμενο το επιλεγμένο εξάρτημα να είναι ελαττωματικό, τότε

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup (A \cap A_3)$$

και

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3) . \qquad (1)$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $P(A \mid A_1) = 0{,}05$, $P(A \mid A_2) = 0{,}04$ και $P(A \mid A_3) = 0{,}02$. Επομένως:

i) Από την (1) και τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(A \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(A \mid A_3)$$

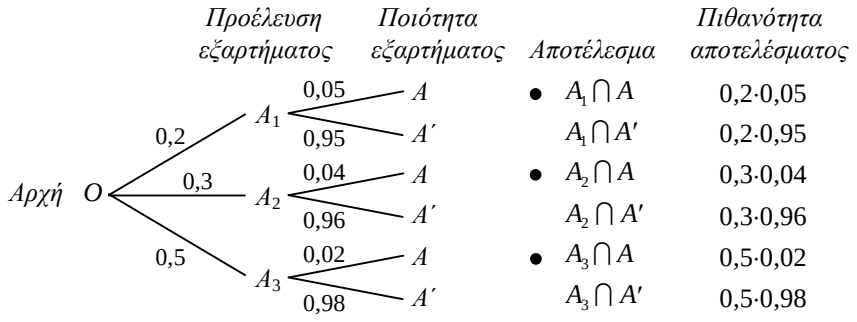
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}032 .$$

ii) Ζητάμε την πιθανότητα $P(A_1 \mid A)$. Έχουμε

$$P(A_1 \mid A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid A_1) \cdot P(A_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}032} = \frac{0{,}01}{0{,}032} = 0{,}3125 ,$$

δηλαδή, $31{,}25\%$.

Η λύση προβλημάτων όπως το προηγούμενο, διευκολύνεται με τη βοήθεια ενός δεντροδιαγράμματος, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Οι *κλάδοι* OA_1, OA_2 και OA_3 αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα προέλευσης του εξαρτήματος από τις μηχανές I, II και III αντιστοίχως, και οι αντίστοιχες πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών είναι γραμμένες πάνω στους κλάδους. Από το τέλος κάθε τέτοιου κλάδου ξεκινούν δύο άλλοι *κλάδοι*, που αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό ή μη ελαττωματικό με γραμμένες πάλι επάνω τους τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα (i) επισημαίνουμε πρώτα τις *διαδρομές* που οδηγούν σε ελαττωματικό εξάρτημα.

Οι διαδρομές αυτές είναι οι OA_1A, OA_2A και OA_3A και αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα $A_1 \cap A$, $A_2 \cap A$ και $A_3 \cap A$.

Στη συνέχεια με εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού νόμου των πιθανοτήτων υπολογίζουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών. Έχουμε $P(A_1 \cap A) = 0{,}2 \cdot 0{,}05$, $P(A_2 \cap A) = 0{,}3 \cdot 0{,}04$ και $P(A_3 \cap A) = 0{,}5 \cdot 0{,}02$.

Τέλος, επειδή τα ενδεχόμενα που παριστάνουν οι διαδρομές είναι ασυμβίβαστα, προσθέτουμε τις παραπάνω πιθανότητες και βρίσκουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A. Επομένως

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}032 .$$

ΣΧΟΛΙΟ

Στο δεύτερο ερώτημα της παραπάνω εφαρμογής γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του πειράματος και ζητάμε την πιθανότητα να προέρχεται το εξάρτημα από τη

μηχανή Ι. Η πιθανότητα αυτή $P(A_1 \mid A)$ λέγεται “εκ των υστέρων (a posteriori) πιθανότητα”, ενώ η $P(A_1)$ λέγεται “εκ των προτέρων (a priori) πιθανότητα”.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ρίχνει κάποιος ένα ζάρι και αναγγέλλει ότι έφερε ζυγό αριθμό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει φέρει 6;

2. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνει κάποιος τυχαία ένα φύλλο και λέει ότι είναι “σπαθί”. Ποια είναι η πιθανότητα το φύλλο να είναι φιγούρα;

3. Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύουν $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ και $P(A \mid B)=\frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(B \mid A)$ και $P(A' \cup B)$.

4. Αν $P(A \cup B)=\frac{5}{6}$, $P(B \mid A)=\frac{1}{4}$ και $P(A)=\frac{2}{3}$, να βρείτε την $P(B)$.

5. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε 6 στην πρώτη ρίψη και περιττό αριθμό στη δεύτερη ρίψη.

6. Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινες και 8 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε από το κουτί τυχαίως μια μπάλα, σημειώνουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η πρώτη μπάλα να είναι μαύρη και η δεύτερη κόκκινη.

7. Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα και ισχύουν $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(A \cap B)=\frac{1}{5}$. Να βρείτε τις $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

8. Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύουν $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A \mid B)=\frac{2}{3}$ και $P(B \mid A)=\frac{1}{2}$.

i) Είναι τα A και B ανεξάρτητα; ii) Είναι τα A και B ξένα μεταξύ τους;
iii) Να υπολογίσετε την $P(B)$.

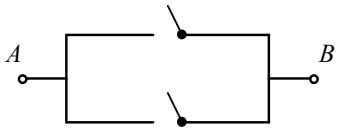
9. Για δύο ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι

$$P(A \mid B) + P(A' \mid B) = 1$$

10. Σε ένα Γυμνάσιο στις εξετάσεις του Ιουνίου το 25% έγραψε στα Μαθηματικά κάτω από τη βάση, το 15% έγραψε στη Φυσική κάτω από τη βάση και το 10% των μαθητών έγραψε και στα δύο μαθήματα κάτω από τη βάση. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή του Γυμνασίου αυτού.
i) Αν έχει αποτύχει στη Φυσική, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;
ii) Αν έχει αποτύχει στα Μαθηματικά ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στη Φυσική;

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο διπλανό κύκλωμα "εν παραλλήλω" η πιθανότητα κάθε διακόπτης να είναι κλειστός (δηλαδή να επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος) είναι 0,8. Οι διακόπτες λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να διέρχεται ρεύμα από το A στο B.



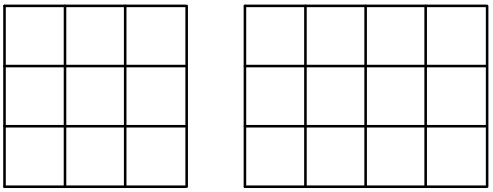
2. Η πιθανότητα να πάθει βλάβη μέσα στον πρώτο χρόνο λειτουργίας της μια μηχανή ορισμένου τύπου είναι 10%. Αν μια βιομηχανία έχει δύο τέτοιες μηχανές, οι οποίες άρχισαν να λειτουργούν συγχρόνως και ανεξάρτητα η μια από την άλλη, να βρείτε την πιθανότητα η μία μόνο να πάθει βλάβη μέσα στον πρώτο χρόνο λειτουργία τους.

3. Σε ένα νησί φτάνουν καθημερινά πλοία, που αναχωρούν από Πειραιά και Ραφήνα και σε ποσοστά 60% και 40% αντιστοίχως. Το 10% των πλοίων από Πειραιά και το 5% των πλοίων από Ραφήνα φθάνουν με καθυστέρηση στο νησί. Αν μια μέρα επιλέξουμε τυχαία ένα πλοίο που φτάνει στο νησί, να βρεθούν οι πιθανότητες:
i) Να φτάσει με καθυστέρηση ii) Αν φτάσει με καθυστέρηση, να έρχεται από Πειραιά.

4. Σε ένα εργοστάσιο το 60% των εργαζομένων είναι άνδρες και το 40% είναι γυναίκες. Από τους άνδρες καπνίζει το 50% και από τις γυναίκες το 30%. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο που καπνίζει, ποια η πιθανότητα να είναι γυναίκα;

5. Μια κληρωτίδα περιέχει ν λαχνούς από τους οποίους κερδίζει μόνο ένας. Δύο άτομα παίρνουν το ένα μετά το άλλο από την κληρωτίδα ένα ακριβώς λαχνό χωρίς επανατοποθέτηση. Κάποιος υποστηρίζει ότι το πρώτο άτομο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει από το δεύτερο. Να εξετάσετε αν έχει δίκιο.

6. Δύο κτήματα έχουν χωριστεί σε 9 και 12 οικόπεδα, όπως φαίνεται παρακάτω:



Επιλέγουμε τυχαίως και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο ένα οικόπεδο από κάθε κτήμα.

i) Ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο οικόπεδα να είναι γωνιακά;
ii) Ποια είναι η πιθανότητα κανένα από τα οικόπεδα να μην είναι γωνιακό;
iii) Ποια είναι η πιθανότητα ένα τουλάχιστον από τα οικόπεδα να είναι γωνιακό;

7. Το 1‰ ενός πληθυσμού πάσχει από μια σοβαρή ασθένεια. Ένα καινούργιο τεστ διάγνωσης της ασθένειας έχει πιθανότητα θετικού σφάλματος (θετικό τεστ, ενώ το άτομο είναι υγιές) 1% και πιθανότητα αρνητικού σφάλματος (αρνητικό τεστ, ενώ το άτομο πάσχει από την ασθένεια) 5%. Για ένα τυχαίο άτομο από τον πληθυσμό αυτό το τεστ είναι θετικό. Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο να πάσχει πράγματι από την ασθένεια αυτή.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3, ..., 100\}$. Δίνονται και οι

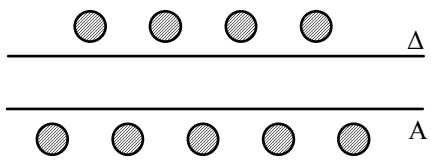
πιθανότητες $P(\kappa)=\frac{1}{2^{\kappa}}$, $\kappa=1,2,...,100$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(0)$.

2. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και A, B υποσύνολα του Ω. Υποθέτουμε ότι $P(A')\le 0{,}28$ και $P(B')\le 0{,}71$. Να αποδείξετε ότι i) $P(A\cap B)\ge 1{,}01-P(A\cup B)$ και ii) $A\cap B\ne\varnothing$.

3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις 9 δέντρων τα οποία θα φυτευθούν κατά μήκος των πλευρών ενός δρόμου, 5 στην ανατολική πλευρά και 4 στη δυτική πλευρά.

i) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό αν όλα τα δέντρα είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

ii) Σε ένα τυχαίο φύτεμα των δέντρων ποια είναι η πιθανότητα δύο ορισμένα δέντρα να βρεθούν στην ίδια πλευρά του δρόμου και σε διπλανές θέσεις;



4. Ένα κουτί περιέχει μπάλες όμοιες σε σχήμα και σε μέγεθος, αλλά οι κ από αυτές είναι άσπρες και οι υπόλοιπες λ είναι μαύρες. Παίρνουμε δύο μπάλες τη μια κατόπιν της άλλης και χωρίς επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η 2η μπάλα να είναι μαύρη. Αν επανατοποθετήσουμε την 1η μπάλα, ποια είναι τότε η πιθανότητα η 2η μπάλα να είναι μαύρη; Τι παρατηρείτε;

5. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, να αποδείξετε ότι είναι ανεξάρτητα και τα ενδεχόμενα: i) A' και B ii) A και B', iii) A' και B'.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Αν ρίξουμε δύο νομίσματα τα αποτελέσματα μπορεί να είναι δύο “κεφαλές”, μια “κεφαλή” και μια “γράμματα”, η δύο “γράμματα”, και

επομένως, καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Τι είναι λάθος στο επιχείρημα αυτό; Ποιο είναι το σωστό;

2. Ένα νόμισμα ρίχνεται 5 φορές και έρχεται κάθε φορά "κεφαλή". Επομένως, η πιθανότητα να φέρουμε "κεφαλή" σε μια ρίψη του νομίσματος είναι $\frac{5}{5}=1$. Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα αυτό.

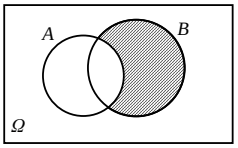
3. Τρία συνηθισμένα ζάρια, ένα άσπρο, ένα μαύρο και ένα κόκκινο, τοποθετούνται σε ένα κουτί. Ένα πείραμα συνίσταται στην τυχαία επιλογή ενός ζαριού από το κουτί, στη ρίψη του ζαριού αυτού και στην παρατήρηση του χρώματος και της ένδειξης της άνω έδρας του.
(α) Τι σημαίνει εδώ η λέξη "τυχαία";
(β) Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου του πειράματος είναι
(i) $3\cdot 6$ (ii) 3^6 (iii) $6!$ (iv) 6^3 (v) $3\cdot 6^3$.
(Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση)

(Σε καθεμιά από τις ερωτήσεις 4-7 μία μόνο από τις συνοδευτικές απαντήσεις είναι σωστή. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση).

4. Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,4, ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού;
(α) 0,2 (β) 0,8 (γ) 0,6 (δ) 1,4.

5. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι τέτοια ώστε $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, ποια είναι η $P(A\cup B)$;
(α) 1 (β) $\frac{3}{4}$ (γ) $\frac{1}{4}$ (δ) $\frac{1}{16}$ (ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

6. Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα Venn το σκιασμένο εμβαδόν;
(α) B (β) A' (γ) $A-B$ (δ) $B-A$.



7. Ποιος είναι ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 2 αγόρια και 3 κορίτσια από 10 αγόρια και 8 κορίτσια;
(α) $\Delta_2^{10}\cdot\Delta_3^8$ (β) $\Delta_2^{10}+\Delta_3^8$ (γ) $\binom{10}{2}+\binom{8}{3}$ (δ) $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{3}$

(Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις 8-13 είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το Λ).

8. Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

9. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι αντίθετα. Σ Λ

10. Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους A' και B' είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

11. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι και ανεξάρτητα. Σ Λ

12. Δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

13. Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε και τα αντίθετά τους είναι ανεξάρτητα. Σ Λ

14. Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, με $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}2$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Ι στο ίσο του της στήλης ΙΙ.

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
$P(A \cap B)$	0,8
$P(A \cup B)$	0,6
$P(A \mid B)$	0
$P(B \mid A)$	0,2
	0,12

15. Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, με $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}2$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Ι στο ίσο του της στήλης ΙΙ.

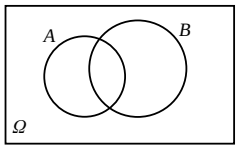
Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
$P(A \cap B)$	0,6

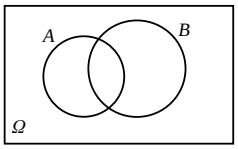
$P(A \cup B)$	0,68
$P(A \mid B)$	0,2
$P(B \mid A)$	0,12

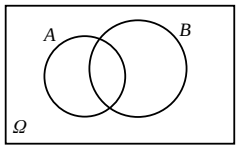
16. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, μπορεί να ισχύει $P(A) + P(B) = 1{,}3$;

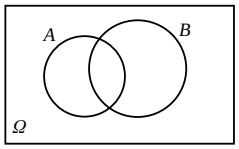
-Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

17. Να γράψετε με τη βοήθεια των πράξεων των συνόλων το ενδεχόμενο που παριστάνει το σκιασμένο εμβαδόν σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn:

i) 

ii) 

iii) 

iv) 

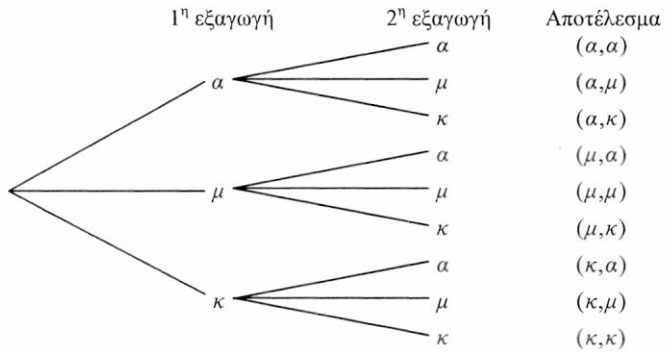
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω α, μ, κ τα αποτελέσματα η μπάλα να είναι άσπρη, μαύρη και κόκκινη αντιστοίχως. Έχουμε

i)

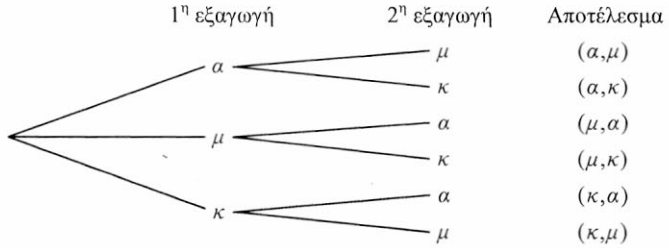


$\Omega = \{(\alpha,\alpha), (\alpha,\mu), (\alpha,\kappa), (\mu,\alpha), (\mu,\mu), (\mu,\kappa), (\kappa,\alpha), (\kappa,\mu), (\kappa,\kappa)\}$.

ii) $\{(\kappa,\alpha)\ (\kappa,\mu), (\kappa,\kappa)\}$

iii) $\{(\alpha,\alpha),(\mu,\mu),(\kappa,\kappa)\}$

2. i)



$\Omega = \{(\alpha,\mu), (\alpha,\kappa), (\mu,\alpha), (\mu,\kappa), (\kappa,\alpha), (\kappa,\mu)\}$

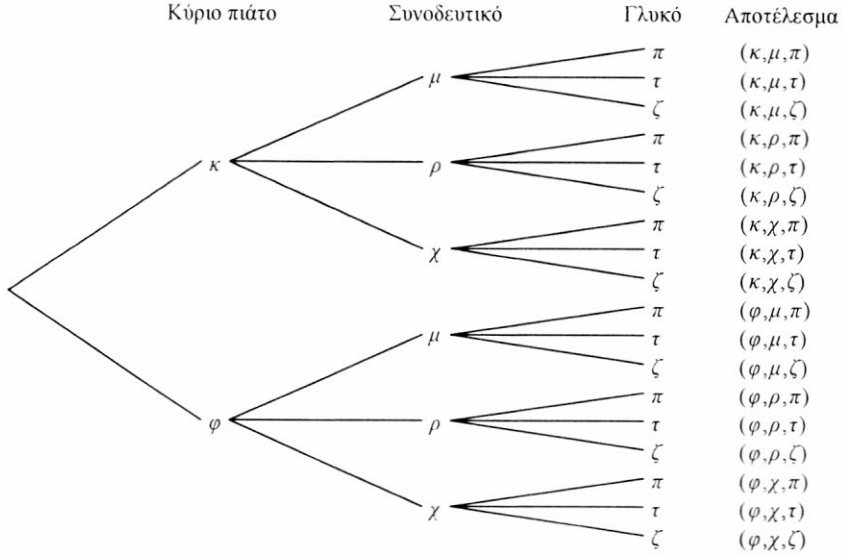
ii) $\{(\kappa,\alpha)\ (\kappa,\mu)\}$

iii) $\varnothing$.

3. i) $\Omega = \{$(Κύπρος, αεροπλάνο), (Κύπρος, πλοίο), (Μακεδονία, αυτοκίνητο), (Μακεδονία, τρένο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)$\}$

ii) $A = \{$(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)$\}$.

4. i) Αν συμβολίσουμε κάθεμια από τις επιλογές με το αρχικό της γράμμα, έχουμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα:



Το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις 18 τριάδες της στήλης "αποτέλεσμα" αποτελεί το δειγματικό χώρο του πειράματος.

ii) $A = \{(\kappa,\mu,\pi), (\kappa,\rho,\pi), (\kappa,\chi,\pi), (\varphi,\mu,\pi), (\varphi,\rho,\pi), (\varphi,\chi,\pi)\}$

iii) $B = \{(\kappa,\mu,\pi), (\kappa,\mu,\tau), (\kappa,\mu,\zeta), (\kappa,\rho,\pi), (\kappa,\rho,\tau), (\kappa,\rho,\zeta), (\kappa,\chi,\pi), (\kappa,\chi,\tau), (\kappa,\chi,\zeta)\}$

iv) $A \cap B = \{(\kappa,\mu,\pi), (\kappa,\rho,\pi), (\kappa,\chi,\pi)\}$

v) $\Gamma = \{(\kappa,\rho,\pi), (\kappa,\rho,\tau), (\kappa,\rho,\zeta), (\varphi,\rho,\pi), (\varphi,\rho,\tau), (\varphi,\rho,\zeta)\}$

$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(\kappa,\rho,\pi)\}$.

5. i) $\Omega = \{(0,\alpha), (0,\beta), (0,\gamma), (0,\delta), (1,\alpha), (1,\beta), (1,\gamma), (1,\delta)\}$

ii) $A = \{(0,\gamma), (0,\delta)\}$

iii) $B = \{(0,\alpha), (0,\beta), (1,\alpha), (1,\beta)\}$

iv) $\Gamma = \{(1,\alpha), (1,\beta), (1,\gamma), (1,\delta)\}$.

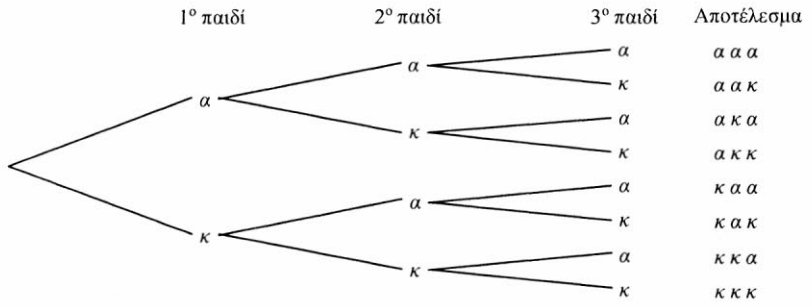
6. i) $A = \{3\}$, $B = \{2,4,6\}$, $A \cap B = \varnothing$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή υπάρχουν και Έλληνες καθολικοί, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \varnothing$, δηλαδή τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

iii) Επειδή υπάρχουν γυναίκες άνω των 30, που να είναι 30 χρόνια παντρεμένες, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \varnothing$.

iv) $A \cap B = \varnothing$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα

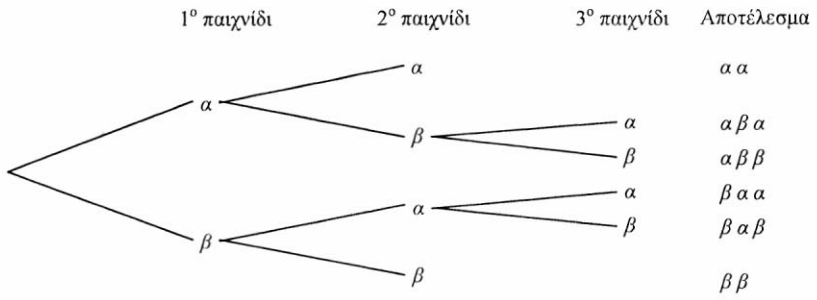
7.



$\Omega = \{\alpha\alpha\alpha, \alpha\alpha\kappa, \alpha\kappa\alpha, \alpha\kappa\kappa, \kappa\alpha\alpha, \kappa\alpha\kappa, \kappa\kappa\alpha, \kappa\kappa\kappa\}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.



$\Omega = \{\alpha\alpha, \alpha\beta\alpha, \alpha\beta\beta, \beta\alpha\alpha, \beta\alpha\beta, \beta\beta\}$.

2. Τα αποτελέσματα της ρίψης δύο ζαριών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου.

1η ρίψη \ 2η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Άρα

$A = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$

$B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

$\Gamma = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (4,1)\}$

$A \cap B = \{(3,1), (4,2), (5,1), (5,3), (6,2), (6,4)\}$

$A \cap \Gamma = \{(2,1), (3,1), (4,1)\}$

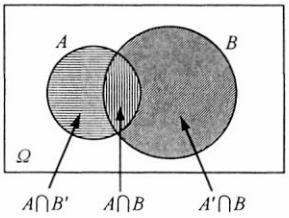
$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(3,1)\}$.

3. Αν $x \in B'$, τότε $x \notin B$, οπότε $x \notin A$, αφού $A \subseteq B$.
Άρα $x \in A'$. Επομένως $B' \subseteq A'$.

4. $A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$.

Δηλαδή

$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$



3.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η τράπουλα έχει 4 πεντάρια και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{4}{52} = \mathbf{\frac{1}{13}}$.

ii) Το ενδεχόμενο είναι το αντίθετο του ενδεχομένου του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \mathbf{\frac{12}{13}}$.

2. Αν Γ το αποτέλεσμα "γράμματα" και K το αποτέλεσμα "κεφαλή", ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{K\Gamma, \Gamma K, KK, \Gamma\Gamma\}$ και υπάρχει μια μόνο ευνοϊκή περίπτωση η $\Gamma\Gamma$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

3. Το κουτί έχει συνολικά $10 + 15 + 5 + 10 = 40$ μπάλες.

i) Οι μαύρες μπάλες είναι 15. Άρα η πιθανότητα να είναι η μπάλα μαύρη $\frac{15}{40}$.

ii) Υπάρχουν 10 άσπρες και 15 μαύρες μπάλες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40}=\mathbf{\frac{25}{40}}$.

iii) Το να μην είναι η μπάλα ούτε κόκκινη ούτε πράσινη, σημαίνει ότι μπορεί να είναι άσπρη ή μαύρη. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40}=\mathbf{\frac{25}{40}}$.

4. Η τάξη έχει συνολικά $4+11+9+3+2+1=30$ μαθητές. Για να έχει η οικογένεια ενός μαθητή 3 παιδιά, πρέπει ο μαθητής αυτός να έχει δηλώσει ότι έχει 2 αδέλφια. Επειδή 9 μαθητές δήλωσαν ότι έχουν 2 αδέλφια, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\mathbf{\frac{9}{30}}$.

5. Έχουμε $\Omega=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$, $A=\{12,15,18\}$ και $B=\{12,16,20\}$. Επομένως

i) $P(A)=\mathbf{\frac{3}{11}}$. ii) Έχουμε $P(B)=\frac{3}{11}$, άρα $P(B')=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$.

6. Αν Λ, Π και N είναι τα ενδεχόμενα να κερδίσουν ο Λευτέρης, ο Παύλος και ο Νίκος αντιστοίχως, τότε $P(\Lambda)=\frac{30}{100}$, $P(\Pi)=\frac{20}{100}$ και $P(N)=\frac{40}{100}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

i) $P(\Lambda\cup\Pi)=P(\Lambda)+P(\Pi)=\frac{30}{100}+\frac{20}{100}=\frac{50}{100}$, δηλαδή **50%**.

ii) $P(\Lambda\cup N)'=1-P(\Lambda\cup N)=1-P(\Lambda)-P(N)=1-\frac{30}{100}-\frac{40}{100}=\frac{30}{100}$,

δηλαδή **30%**.

7. Έχουμε διαδοχικά

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)$$

$$\frac{17}{30}+\frac{7}{15}-P(A\cap B)=\frac{2}{3}$$

$$P(A\cap B)=\frac{17}{30}+\frac{7}{15}-\frac{2}{3}=\frac{17}{30}+\frac{14}{30}-\frac{20}{30}=\mathbf{\frac{11}{30}}.$$

8. Έχουμε διαδοχικά

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)$$

$$\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

$$P(B)=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}+\frac{2}{6}-\frac{3}{6}=\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}}.$$

9. Έχουμε διαδοχικά $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)$

$$2P(A)-0{,}2=0{,}6$$

$$2P(A)=0{,}8$$

$$\boldsymbol{P(A)=0{,}4}\,.$$

10. Έχουμε διαδοχικά $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}.$$

11. Έχουμε

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le P(A)+P(B)$$

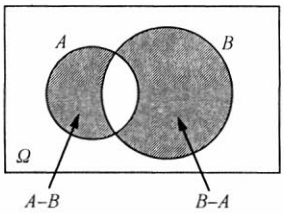
$$\Leftrightarrow 0\le P(A\cap B)\qquad \text{που ισχύει.}$$

12. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει κάρτα D και B το ενδεχόμενο να έχει κάρτα V. Έχουμε $P(A)=\frac{25}{100}$, $P(B)=\frac{55}{100}$, $P(A\cap B)=\frac{15}{100}$. Επομένως

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{25}{100}+\frac{55}{100}-\frac{15}{100}=\frac{65}{100},\qquad \text{δηλαδή } \mathbf{65\%}.$$

13. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει υπέρταση και B το ενδεχόμενο να έχει στεφανιαία νόσο. Έχουμε $P(A)=\frac{10}{100}$, $P(B)=\frac{6}{100}$ και $P(A\cap B)=\frac{2}{100}$.



α) Έχουμε

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{10}{100}+\frac{6}{100}-\frac{2}{100}=\frac{14}{100},\qquad \text{δηλαδή } \mathbf{14\%}.$$

β) Το ενδεχόμενο να έχει το άτομο μόνο μια ασθένεια είναι το $(A-B)\cup(B-A)$. Τα ενδεχόμεα $(A-B)$ και $(B-A)$ είναι ασυμβίβαστα.

Επομένως $P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A-B)+P(B-A)$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

$$=\frac{10}{100}+\frac{6}{100}-\frac{4}{100}=\frac{12}{100},$$ δηλαδή **12%**.

14. Έστω A το ενδεχόμενο να μαθαίνει αγγλικά και B το ενδεχόμενο να μαθαίνει γαλλικά. Έχουμε $P(A)=\frac{80}{100}$, $P(B)=\frac{30}{100}$ και $P(A\cap B)=\frac{20}{100}$.

Άρα $P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A\cup B)$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

$$=1-\frac{80}{100}-\frac{30}{100}+\frac{20}{100}=\frac{10}{100},$$ δηλαδή **10%**.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\boldsymbol{\kappa+\lambda-\mu}$.

ii) $P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A\cup B)=\mathbf{1-\kappa-\lambda+\mu}$

iii) $P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A-B)+P(B-A)$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

$$=\boldsymbol{\kappa+\lambda-2\mu}.$$

2. Αν A και B τα ενδεχόμενα να μην έχει ένα νοικοκυριό τηλεόραση και Βίντεο αντιστοίχως, θα είναι $P(A)=\frac{15}{100}$ και $P(B)=\frac{40}{100}$ και $P(A\cap B)=\frac{10}{100}$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A\cup B)=1-\big[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\big]$$

$$=1-\left(\frac{15}{100}+\frac{40}{100}-\frac{10}{100}\right)=1-\frac{45}{100}=\frac{55}{100},$$ δηλαδή **55%**.

3. Έχουμε διαδοχικά

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{3}{4}$$

$$4P(A) = 3 - 3P(A)$$

$$7P(A) = 3,$$

$$P(A) = \mathbf{\frac{3}{7}}, \qquad P(A') = 1 - P(A) = \mathbf{\frac{4}{7}}.$$

4. Αν $P(A) = x$, τότε $P(A') = 1 - x$, όπου $0 < x < 1$.

Έχουμε $\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \geq 4$

$$\Leftrightarrow 1 - x + x \geq 4x(1-x)$$

$$\Leftrightarrow 1 - x + x \geq 4x - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0$$ που ισχύει.

5. • Έχουμε $A \cap B \subseteq A$

$$P(A \cap B) \leq P(A)$$

$$P(A \cap B) \leq 0{,}6 \qquad (1)$$

• Έχουμε $P(A \cup B) \leq 1$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0{,}6 + 0{,}7 - 1 \leq P(A \cap B)$$

$$0{,}3 \leq P(A \cap B) \qquad (2)$$

από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0{,}3 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}6.$$

6. $P(B) - P(A') \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) - 1 + P(A) \leq P(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow P(B) + P(A) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1$$ που ισχύει.

3.3 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. • Κάθε τρόπος ντυσίματος αντιστοιχεί σε μια πεντάδα:

σακάκι - παντελόνι - πουκάμισο - κάλτσες - παπούτσια.

Η 1η θέση της πεντάδας μπορεί να συμπληρωθεί με 3 τρόπους, η 2η με 4, η 3η με 5, η 4η με 10 και η 5η με 2 τρόπους, Επομένως υπάρχουν συνολικά

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2 = \mathbf{1200} \text{ τρόποι.}$$

• Αν το σακάκι που θα φορεθεί είναι ορισμένο, τότε η 1η θέση της πεντάδας μπορεί να συμπληρωθεί με ένα μόνο τρόπο. Επομένως υπάρχουν $1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2 = 400$ διαφορετικές πεντάδες και η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{400}{1200} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.

2. • Έχουμε να συμπληρώσουμε επτά θέσεις. Καθεμιά από τις τρεις πρώτες μπορεί να συμπληρωθεί με 24 τρόπους, όσα είναι και τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Η 4η θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 9 τρόπους, αφού ο αριθμός πρέπει να είναι τετραψήφιος και επομένως δεν μπορεί να αρχίζει με 0. Τέλος καθεμιά από τις υπόλοιπες τρεις θέσεις μπορεί να συμπληρωθεί με 10 τρόπους. Άρα υπάρχουν συνολικά

$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$	$5^η$	$6^η$	$7^η$
24	24	24	9	10	10	10

$$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{124.416.000} \text{ διαφορετικές πινακίδες.}$$

• Αν μια πινακίδα αρχίζει με φωνήεν και τελειώνει σε άρτιο ψηφίο, τότε η 1η θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 7 τρόπους, όσα δηλαδή είναι τα φωνήεντα, ενώ η τελευταία θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 5 τρόπους, όσα δηλαδή είναι τα άρτια ψηφία. Επομένως το πλήθος των πινακίδων αυτών είναι

$$7 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 18.144.000$$

και η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

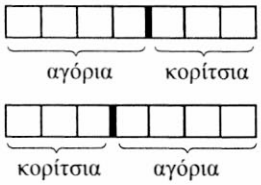
$$\frac{7 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5}{24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{7 \cdot 5}{24 \cdot 10} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{48}} \approx 14{,}6\%.$$

3. • Το 1ο άτομο μπορεί να καθίσει σε μια οποιαδήποτε από τις 6 θέσεις δηλαδή έχει 6 επιλογές. Αφού καθίσει το 1ο άτομο, το 2ο άτομο μπορεί να καθίσει σε μια από τις υπόλοιπες 5 θέσεις, δηλαδή έχει 5 επιλογές κτλ. Έτσι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις είναι

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \mathbf{360}$, όσες δηλαδή και οι διατάξεις των 6 ανά 4.

• Αν η τελευταία θέση μείνει κενή, τότε τα 4 άτομα μπορούν να καθίσουν με $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ τρόπους και επομένως η ζητούμενη πιθανοτητα είναι ίση με $\frac{120}{360} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.

4. • Έχουμε $4 + 3 = 7$ άτομα και επομένως υπάρχουν **7!** τρόποι για να μπουν σε μια σειρά.



• Τα αγόρια μπορούν να μπουν σε μια σειρά με 4! τρόπους και τα κορίτσια με 3! τρόπους. Επίσης μπορούν να προηγούνται στη σειρά τα αγόρια ή τα κορίτσια. Έτσι έχουμε συνολικά $4! \cdot 3! \cdot 2$ τρόπους με τους οποίους μπορούν να μπουν σε μια σειρά όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια και η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{4! \cdot 3! \cdot 2}{7!} = \frac{4! \cdot 3! \cdot 2}{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{35}} \approx \mathbf{5{,}7\%}.$$

5. Έχουμε $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$ και $\binom{\nu}{\nu-\kappa} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!(\nu-\nu+\kappa)!} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\kappa!}$.

Άρα $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$.

6. • Γνωρίζουμε ότι δύο σημεία ορίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία αυτά και δεν παίζει ρόλο η σειρά των άκρων. Έτσι τα σημεία A και B ορίζουν το τμήμα AB ή BA.

Επομένως τα 8 σημεία $A_1, A_2, ..., A_8$ ορίζουν συνολικά $\binom{\mathbf{8}}{\mathbf{2}} = 28$ ευθύγραμμα τμήματα.

• Το πλήθος των τμημάτων που δεν διέρχονται από το A, είναι $\binom{7}{2}$ και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\binom{7}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{\frac{7!}{2! \cdot 5!}}{\frac{8!}{2! \cdot 6!}} = \frac{6}{8} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Για να φτιάξουμε έναν αριθμό, πρέπει να συμπληρώσουμε τις θέσεις μιας τετράδας. Επειδή τα ψηφία μπορεί να επαναλαμβάνονται, κάθε θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 5 τρόπους και επομένως μπορούμε να φτιάξουμε $5\cdot5\cdot5\cdot5=5^4$ διαφορετικούς αριθμούς. Οι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία είναι όσες και οι διατάξεις των 5 ανά 4, δηλαδή $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$
5 τρόποι	5 τρόποι	5 τρόποι	5 τρόποι

$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$
5 τρόποι	4 τρόποι	3 τρόποι	2 τρόποι

$$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5^4}=\frac{4\cdot3\cdot2}{5^3}=\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{125}}=0{,}192\,,\quad \text{δηλαδή } \mathbf{19{,}2\%}.$$

2. • Το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων είναι $\nu!$.

• Το πλήθος των μεταθέσεων που αρχίζουν με 1 είναι $(\nu-1)!$ και επομένως αυτές που δεν αρχίζουν με 1 είναι

$$\nu!-(\nu-1)!=(\nu-1)!\cdot\nu-(\nu-1)!=(\nu-1)!(\nu-1)$$

Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου μια τυχαία από τις $\nu!$ μεταθέσεις να μην αρχίζει από 1 είναι ίση με

$$\frac{(\nu-1)!(\nu-1)}{\nu!}=\frac{(\nu-1)!(\nu-1)}{(\nu-1)!\nu}=\frac{\nu-1}{\nu}=\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\nu}}.$$

3. • Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να καθίσουν σε μια σειρά 10 φίλοι είναι 10!.

• Αν ο Κώστας και η Ελένη καθίσουν δίπλα δίπλα, τότε είναι σαν να έχουμε 9 άτομα σε μια σειρά και επομένως υπάρχουν 9! τρόποι διάταξής τους. Επειδή όμως σε μια τέτοια διάταξη μπορεί να καθίσει πρώτα ο Κώστας και ύστερα η Ελένη ή αντιστρόφως, οι διαφορετικοί τρόποι είναι τελικά $9!\cdot2$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{9!\cdot2}{10!}=\frac{2}{10}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$, δηλαδή **20%**.

4. • Το κάθε άτομο μπορεί να έχει γεννηθεί σε μια οποιαδήποτε από τις τέσσερις εποχές, άρα υπάρχουν συνολικά $4\cdot4\cdot4\cdot4=4^4$ δυνατές περιπτώσεις.

• Για να υπολογίσουμε το πλήθος των περιπτώσεων στις οποίες τα 4 άτομα έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές εποχές σκεπτόμαστε ως εξής:

Το 1ο άτομο μπορεί να έχει γεννηθεί σε μια από τις 4 εποχές.
Το 2ο άτομο μπορεί να έχει γεννηθεί σε μια από τις 3 άλλες εποχές.
Το 3ο άτομο μπορεί να έχει γεννηθεί σε μια από τις 2 άλλες εποχές.
Το 4ο άτομο μπορεί να έχει γεννηθεί στη μία εποχή που απομένει.

Επομένως υπάρχουν συνολικά $4\cdot3\cdot2\cdot1$ ευνοϊκές περιπτώσεις. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4^4}=\frac{3\cdot2\cdot1}{4^3}=\frac{6}{64}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{32}},\ \text{δηλαδή}\ \mathbf{9{,}375\%}.$$

5. Το πλήθος των δυνατών τρόπων με τους οποίους μπορούμε από $7+6=13$ άτομα να επιλέξουμε 4 είναι $\binom{13}{4}$.

i) Αν όλα τα άτομα που θα επιλέξουμε είναι γυναίκες, τότε υπάρχουν $\binom{6}{4}$ διαφορετικοί τρόποι και η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\binom{6}{4}}{\binom{13}{4}}=\frac{\frac{6!}{4!\,2!}}{\frac{13!}{4!\,9!}}=\frac{4!\cdot6!\cdot9!}{2!\cdot4!\cdot13!}=\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{10\cdot11\cdot12\cdot13}=\frac{3}{11\cdot13}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{143}}.$$

ii) Το ενδεχόμενο ένα τουλάχιστον άτομο να είναι άνδρας είναι αντίθετο με το ενδεχόμενο όλα να είναι γυναίκες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$1-\frac{3}{143}=\frac{\mathbf{140}}{\mathbf{143}}.$$

iii) Όταν στα 4 άτομα που θα επιλέξουμε το ένα είναι γυναίκα, τότε τα άλλα τρία θα είναι άνδρες. Έχουμε $\binom{6}{1}$ τρόπους να επιλέξουμε τη γυναίκα και $\binom{7}{3}$ τρόπους να επιλέξουμε τους άνδρες. Επομένως υπάρχουν $\binom{6}{1}\cdot\binom{7}{3}$ τρόποι να περιέχεται στα τέσσερα άτομα μια μόνο γυναίκα και άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{13}{4}}=\frac{6\cdot\frac{7!}{3!4!}}{\frac{13!}{4!9!}}=\frac{6\cdot4!\cdot7!\cdot9!}{3!\cdot4!\cdot13!}=\frac{\mathbf{42}}{\mathbf{143}}.$$

6. Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε από τις 20 ασφάλειες να πάρουμε 4 είναι $\binom{20}{4}$.

Το κουτί θα γίνει αποδεκτό, αν βρεθούν μια ή καμιά ελαττωματική ασφάλεια.

Η πιθανότητα να μη βρεθεί καμιά ελαττωματική ασφάλεια είναι $\dfrac{\binom{15}{4}}{\binom{20}{4}}$.

Η πιθανότητα να βρεθεί ακριβώς μια ελαττωματική ασφάλεια είναι $\dfrac{\binom{15}{3}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{20}{4}}$.

Επειδή τα δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\binom{15}{4}}{\binom{20}{4}}+\frac{\binom{15}{3}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{20}{4}}=\frac{7\cdot 13}{17\cdot 19}+\frac{5\cdot 7\cdot 13}{3\cdot 17\cdot 19}=\frac{728}{969}\cong \mathbf{75\%}.$$

7. • Κάθε τρίγωνο θα έχει τις δύο κορυφές του στη μια ευθεία και την τρίτη κορυφή του στην άλλη ευθεία.
Από τα 10 σημεία της ε_1 μπορούμε να επιλέξουμε δύο ως κορυφές ενός τριγώνου με $\binom{10}{2}$ τρόπους. Η τρίτη κορυφή του τριγώνου μπορεί να επιλεγεί με τόσους τρόπους, όσα είναι τα σημεία που έχουμε ορίσει στην ε_2, δηλαδή με 20 τρόπους. Επομένως υπάρχουν $20\cdot\binom{10}{2}$ τρίγωνα με τις δύο κορυφές τους στην ε_1 και την τρίτη στην ε_2. Ανάλογα βρίσκουμε ότι υπάρχουν $10\cdot\binom{20}{2}$ τρίγωνα με τις δύο κορυφές στην ε_2 και την τρίτη στην ε_1. Άρα υπάρχουν συνολικά $20\cdot\binom{10}{2}+10\binom{20}{2}=\mathbf{2.800}$ τρίγωνα.

• Επειδή, όπως είδαμε, υπάρχουν $20\cdot\binom{10}{2}$ τρίγωνα με τη μια πλευρά τους στην ε_1, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{20\cdot\binom{10}{2}}{20\binom{10}{2}+10\binom{20}{2}}=\frac{900}{2.800}=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{28}}.$$

8. Το αποτέλεσμα των ν ρίψεων ενός νομίσματος είναι μια διατεταγμένη ν-άδα κάθε θέση της οποίας μπορεί να συμπληρωθεί με 2 τρόπους, δηλαδή με K (κεφαλή) ή Γ (γράμματα). Επομένως ο δειγματικός χώρος έχει $\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}_{\nu \text{ παράγοντες}} = 2^{\nu}$ στοιχεία. Αφού δεν θα υπάρχουν διαδοχικές ρίψεις με το ίδιο αποτέλεσμα, οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι δύο, οι $K\Gamma K\Gamma K\Gamma\ldots$ και η $\Gamma K\Gamma K\Gamma K\ldots$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{2}{2^{\nu}} = \mathbf{\frac{1}{2^{\nu-1}}}$.

9. Έστω O_1, O_2, O_3 οι οδηγοί και K_1, K_2, K_3 αντιστοίχως τα κλειδιά τους. Οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί να διανεμηθούν τα κλειδιά στους οδηγούς φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

O_1	O_2	O_3
K_1	K_2	K_3
K_1	K_3	K_2
K_2	K_1	K_3
K_2	K_3	K_1
K_3	K_1	K_2
K_3	K_2	K_1

- Επειδή το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται μια μόνο φορά, έχουμε $P(A) = \mathbf{\frac{1}{6}}$.
- Επειδή το ενδεχόμενο B πραγματοποιείται τρεις φορές, έχουμε $P(B) = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$.
- Επειδή το ενδεχόμενο Γ πραγματοποιείται δύο φορές, έχουμε $P(G) = \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$.

10. Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε από $10+12=22$ μαθητές να επιλέξουμε 3 είναι $\binom{22}{3}$. Αν όλοι οι μαθητές είναι αγόρια, τότε υπάρχουν $\binom{12}{3}$ τρόποι επιλογής, ενώ αν όλοι είναι κορίτσια, τότε υπάρχουν $\binom{10}{3}$ τρόποι επιλογής. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\binom{12}{3}+\binom{10}{3}}{\binom{22}{3}} = \frac{220+120}{1540} = \frac{340}{1540} = \mathbf{\frac{17}{77}}.$$

11. Σε 4 ρίψεις ενός ζαριού το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 6^4$. Το ενδεχόμενο να μη φέρουμε 6 στις 4 ρίψεις ενός ζαριού έχει $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 5^4$ ευνοϊκές περιπτώσεις. Επομένως η πιθανότητα να φέρουμε ένα τουλάχιστον 6 στις 4 ρίψεις ενός ζαριού είναι ίση με

$$1-\frac{5^4}{6^4}=1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}\approx \mathbf{0,518}.$$

- Σε 24 ρίψεις δύο ζαριών το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $\underbrace{36\cdot 36\cdots 36}_{24\ \text{παράγοντες}}=36^{24}$. Το ενδεχόμενο να μη φέρουμε εξάρες στις 24 ρίψεις δύο ζαριών έχει $\underbrace{35\cdot 35\cdots 35}_{24\ \text{παράγοντες}}=35^{24}$ ευνοϊκές περιπτώσεις.

Επομένως η πιθανότητα να φέρουμε μια τουλάχιστον φορά εξάρες στις 24 ρίψεις δύο ζαριών είναι ίση με

$$1-\frac{35^{24}}{36^{24}}=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 1-0,5086\approx \mathbf{0,491}.$$

Παρατηρούμε ότι $0,518>0,491$, δηλαδή η πιθανότητα να φέρουμε ένα τουλάχιστον 6 στις 4 ρίψεις ενός ζαριού είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να φέρουμε μια τουλάχιστον φορά εξάρες στις 24 ρίψεις δύο ζαριών.

3.4 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ - ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στη ρίψη ενός ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Το ενδεχόμενο να φέρουμε ζυγό αριθμό είναι $A=\{2,4,6\}$. Επομένως η πιθανότητα να φέρουμε 6 είναι ίση με $\mathbf{\frac{1}{3}}$.

2. Τα "σπαθιά" σε μια τράπουλα είναι συνολικά 13 εκ των οποίων τα 3 είναι φιγούρες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\mathbf{\frac{3}{13}}$.

3. •

$$P(A\mid B)=\frac{4}{5}$$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{4}{5}$$

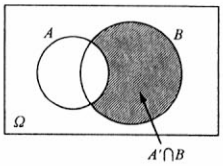
$$P(A\cap B)=\frac{4}{5}\cdot P(B)$$

άρα

$$P(A\cap B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

- $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \mathbf{\dfrac{2}{5}}$

- $$\begin{aligned} P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{7}{10}}. \end{aligned}$$



4.

$$P(B \mid A) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot P(A)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{1}{6}}.$$

Επομένως

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} + P(B) - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}, \qquad \text{άρα } \boldsymbol{P(B)} = \mathbf{\frac{1}{3}}.$$

5. Έστω A το ενδεχόμενο να φέρουμε 6 στην 1η ρίψη και B το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό στη 2η ρίψη. Επομένως επειδή τα A και B είναι ανεξάρτητα έχουμε

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{12}}.$$

6. Έστω A το ενδεχόμενο η 1η μπάλα να είναι μαύρη και B το ενδεχόμενο η 2η μπάλα να είναι κόκκινη. Επειδή επανατοποθετήσαμε την 1η μπάλα στο κουτί, τα A και B είναι ανεξάρτητα και επομένως

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{14} = \mathbf{\frac{12}{49}}.$$

7. • Επειδή τα A και B είναι ανεξάρτητα έχουμε διαδοχικά

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{4}\cdot P(B)$$

άρα $$P(B)=\mathbf{\frac{4}{5}}.$$

• Έχουμε $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{17}{20}}.$$

8. i) Επειδή $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(A\mid B)=\frac{2}{3}$, δηλαδή $P(A)\neq P(A\mid B)$, τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

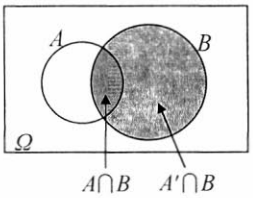
ii) Αν τα A και B ήταν ξένα μεταξύ τους τότε $P(A\cap B)=0$ και επομένως $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0$ και όχι $\frac{2}{3}$. Άρα τα A και B δεν είναι ξένα μεταξύ τους.

iii) Έχουμε $$P(A)\cdot P(B\mid A)=P(B)\cdot P(A\mid B)$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=P(B)\cdot\frac{2}{3}$$

Άρα $$\boldsymbol{P(B)=\frac{1}{4}}.$$

9. Έχουμε $$P(A\mid B)+P(A'\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}$$



$$=\frac{P(A\cap B)+P(A'\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=\mathbf{1}.$$

10. Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει αποτύχει στα Μαθηματικά και B το ενδεχόμενο να έχει αποτύχει στη Φυσική. Έχουμε $P(A)=\frac{25}{100}$, $P(B)=\frac{15}{100}$ και $P(A\cap B)=\frac{10}{100}$.

i) $$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}}=\frac{10}{15}=\mathbf{\frac{2}{3}}\approx 67\%$$

ii) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \dfrac{10}{25} = \mathbf{\dfrac{2}{5}} = 40\%$.

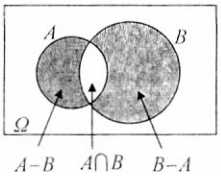
Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Για να διέρχεται ρεύμα από το A στο B αρκεί ένας τουλάχιστον από τους διακόπτες να είναι κλειστός. Επειδή οι διακόπτες λειτουργούν ανεξαρτήτως ο ένας από τον άλλον, η πιθανότητα να είναι και οι δύο κλειστοί είναι $0{,}8 \cdot 0{,}8$. Επομένως η πιθανότητα να είναι ένας τουλάχιστον κλειστός είναι ίση με

$$0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 1{,}6 - 0{,}64 = 0{,}96, \quad \text{δηλαδή } \mathbf{96\%}.$$

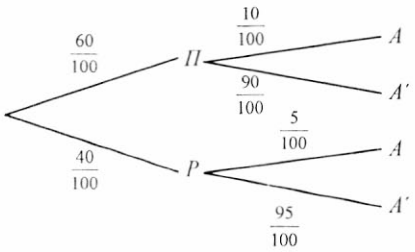
2. Αν A και B είναι τα ενδεχόμενα να πάθουν βλάβη η πρώτη και η δεύτερη μηχανή αντιστοίχως, τότε το ενδεχόμενο να πάθει βλάβη η μια μόνο μηχανή είναι το $(A - B) \cup (B - A)$.

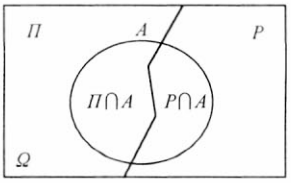
Έχουμε $\quad P((A - B) \cup B - A)) = P(A - B) + P(B - A)$



$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$
$$= \frac{10}{100} + \frac{10}{100} - 2 \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{10}{100}$$
$$= \frac{10}{100} + \frac{10}{100} - \frac{2}{100} = \frac{18}{100}, \quad \text{δηλαδή } \mathbf{18\%}.$$

3. Έστω Π και P τα ενδεχόμενα το πλοίο να έρχεται από Πειραιά και Ραφήνα αντιστοίχως, και A το ενδεχόμενο να φθάνει με καθυστέρηση. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε το δεντροδιάγραμμα:





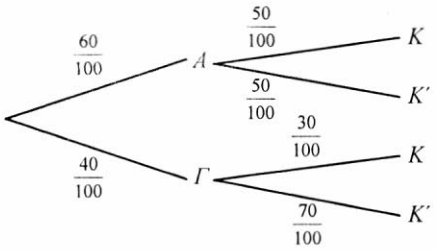
i) Η πιθανότητα να φθάνει το πλοίο με καθυστέρηση είναι ίση με

$$P(A) = \frac{60}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{6}{100} + \frac{2}{100} = \frac{8}{100}, \quad \text{δηλαδή } \mathbf{8\%}.$$

ii) $$P(\Pi \mid A) = \frac{P(\Pi \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\Pi)P(A \mid \Pi)}{P(A)} = \frac{\frac{60}{100} \cdot \frac{10}{100}}{\frac{8}{100}}$$

$$= \frac{\frac{6}{100}}{\frac{8}{100}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \text{δηλαδή } \mathbf{75\%}.$$

4. Έστω A και Γ τα ενδεχόμενα το άτομο να είναι άνδρας ή γυναίκα αντιστοίχως, και K το ενδεχόμενο να καπνίζει.
Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε το δεντροδιάγραμμα:

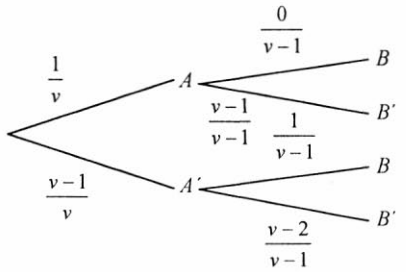


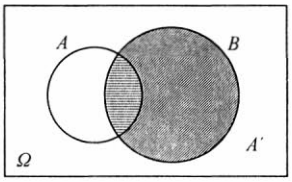
Ζητάμε την $P(\Gamma \mid K)$. Έχουμε

$$P(\Gamma \mid K) = \frac{P(\Gamma \cap K)}{P(K)} = \frac{P(\Gamma)P(K \mid \Gamma)}{P(K)}$$

$$= \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{30}{100}}{\frac{60}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{30}{100}} = \frac{40 \cdot 30}{60 \cdot 50 + 40 \cdot 30} = \frac{\mathbf{2}}{7}.$$

5. Έστω A το ενδεχόμενο να κερδίσει το 1ο άτομο και B το ενδεχόμενο να κερδίσει το 2ο άτομο. Προφανώς $P(A) = \frac{1}{\nu}$.





$$P(B) = P[(B \cap A) \cup (B \cap A')] = P(B \cap A) + P(B \cap A')$$

$$= P(A)P(B \mid A) + P(A')P(B \mid A') = \frac{1}{v} \cdot \frac{0}{v-1} + \frac{v-1}{v} \cdot \frac{1}{v-1} = \frac{1}{v}.$$

Άρα $\boldsymbol{P(A) = P(B)}$.

6. Έστω A το ενδεχόμενο "το οικόπεδο από το πρώτο κτήμα να είναι γωνιακό" και B το ενδεχόμενο "το οικόπεδο από το δεύτερο κτήμα να είναι γωνιακό".

Έχουμε $\quad P(A) = \frac{4}{9}$ και $P(B) = \frac{4}{12}$.

i) Επειδή η επιλογή των οικοπέδων γίνεται ανεξάρτητα από κάθε κτήμα έχουμε

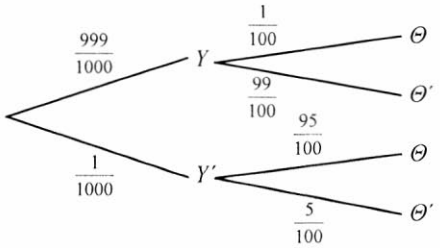
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{12} = \mathbf{\frac{4}{27}}$$

ii) Έχουμε $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{12} - \frac{4}{27} = \mathbf{\frac{17}{27}}.$$

iii) Έχουμε $\quad P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{17}{27} = \mathbf{\frac{10}{27}}.$

7. Έστω Y το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέξαμε να είναι υγιές και Θ το τεστ να είναι θετικό. Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε το δεντροδιάγραμμα:



Έχουμε

$$P(Y' \mid \Theta) = \frac{P(Y' \cap \Theta)}{P(\Theta)} = \frac{P(Y')P(\Theta \mid Y')}{P(\Theta)}$$

$$= \frac{\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100}}{\frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100}} = \frac{95}{999 + 95}$$

$$= \frac{95}{1094} \approx 0{,}087, \text{ δηλαδή } \mathbf{8{,}7\%}.$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έχουμε
$$P(\Omega)=1$$
$$P(0)+P(1)+P(2)+\ldots+P(100)=1$$
$$P(0)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}=1$$
$$P(0)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}\right).$$

Όμως
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{100}-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{100}}}{\frac{1}{2}}=\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^{100}}}.$$

Άρα
$$P(0)=1-1+\frac{1}{2^{100}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^{100}}}.$$

2. Επειδή $P(A')\le 0{,}28$ έχουμε $1-P(A)\le 0{,}28$, οπότε $P(A)\ge 0{,}72$ και επειδή $P(B')\le 0{,}71$, έχουμε $1-P(B')\le 0{,}71$, οπότε $P(B)\ge 0{,}29$.

i) Έχουμε διαδοχικά $P(A\cap B)\ge 1{,}01-P(A\cup B)$

$$P(A\cap B)\ge 1{,}01-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

$P(A)+P(B)\ge 1{,}01$ που ισχύει.

ii) Αν ήταν $A\cap B=\varnothing$, τότε θα είχαμε

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\ge 0{,}72+0{,}29=1{,}01$ που είναι άτοπο,

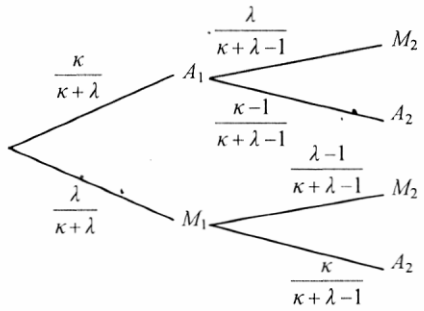
αφού γνωρίζουμε ότι $P(A\cup B)\le 1$.

3. Έχουμε
$$\binom{\nu-1}{\kappa-1}+\binom{\nu-1}{\kappa}=\frac{(\nu-1)!}{(\kappa-1)!(\nu-\kappa)!}+\frac{(\nu-1)!}{\kappa!(\nu-\kappa-1)!}=\frac{(\nu-1)!}{(\kappa-1)!(\nu-\kappa-1)!}\cdot\left[\frac{1}{\nu-\kappa}+\frac{1}{\kappa}\right]$$
$$=\frac{(\nu-1)!}{(\kappa-1)!(\nu-\kappa-1)!}\cdot\frac{\nu}{\kappa(\nu-\kappa)}=\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}=\binom{\nu}{\kappa}.$$

4. • *Χωρίς επανατοποθέτηση*

Έστω A_1 και M_1 τα ενδεχόμενα η 1η μπάλα να είναι άσπρη ή μαύρη αντιστοίχως, και A_2 και M_2 τα ενδεχόμενα η 2η μπάλα να είναι άσπρη ή μαύρη αντιστοίχως.

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε το δεντροδιάγραμμα:



Έχουμε

$$P(M_2) = P[(M_2 \cap A_1) \cup (M_2 \cap M_1)] = P(M_2 \cap A_1) + P(M_2 \cap M_1)$$

$$= P(A_1)P(M_2 \mid A_1) + P(M_1)P(M_2 \mid M_1)$$

$$= \frac{\kappa}{\kappa+\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\kappa+\lambda-1} + \frac{\lambda}{\kappa+\lambda} \cdot \frac{\lambda-1}{\kappa+\lambda-1}$$

$$= \frac{\lambda}{(\kappa+\lambda)(\kappa+\lambda-1)} \cdot (\kappa+\lambda-1) = \boldsymbol{\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}}.$$

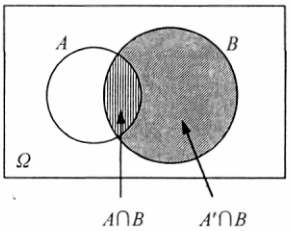
• *Με επανατοποθέτηση*

Αν επανατοποθετήσουμε την 1η μπάλα στο κουτί, τότε προφανώς η πιθανότητα του ενδεχομένου να είναι η 2η μπάλα μαύρη είναι ίση με $\boldsymbol{\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}}$.

Παρατηρούμε ότι, με επανατοποθέτηση ή χωρίς επανατοποθέτηση της 1ης μπάλας στην κάλπη, η πιθανότητα του ενδεχομένου να είναι η 2η μπάλα μαύρη είναι ίδια.

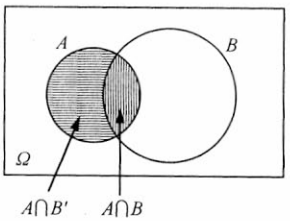
5. i) Έχουμε $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$,

επομένως
$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(B) \cdot P(A'). \end{aligned}$$



ii) Ομοίως έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A) \cdot P(B'). \end{aligned}$$



iii) Έχουμε

$$B' = (A \cap B') \cup (A' \cap B')$$

$$P(B') = P(A \cap B') + P(A' \cap B')$$

$$P(B') = P(A) \cdot P(B') + P(A' \cap B')$$

$$P(B')(1 - P(A)) = P(A' \cap B')$$

$$P(B') \cdot P(A') = P(A' \cap B').$$

Με απόφαση της Ελληνικής Κυβέρνησης τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν βιβλιόσημο προς απόδειξη της γνησιότητάς τους. Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δε φέρει βιβλιόσημο θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α΄).

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

ΕΚΔΟΣΗ ΙΒ΄ 2010 - ΑΝΤΙΤΥΠΑ: 93000 - ΑΡ. ΣΥΜΒΑΣΗΣ: 63/18-2-2010
ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΑΡΒΑΝΙΤΙΔΗΣ Α.Β.Ε.Ε.

ISBN 960-06-0705-2